



面向 21 世纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

弹性力学

(第 3 版)

杨桂通

高等教育出版社

弹性力学

(第3版)

- 1 计算机访问<http://abook.hep.com.cn/1254881>，或手机扫描二维码、下载并安装 Abook 应用。
- 2 注册并登录，进入“我的课程”。
- 3 输入封底数字课程账号（20 位密码，刮开涂层可见），或通过 Abook 应用扫描封底数字课程账号二维码，完成课程绑定。
- 4 单击“进入课程”按钮，开始本数字课程的学习。



课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制，部分内容无法在手机端显示，请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题，请发邮件至 abook@hep.com.cn。



扫描二维码
下载 Abook 应用

<http://abook.hep.com.cn/1254881>

面向 21 世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

弹性力学

(第 3 版)

杨桂通

HEP

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是面向 21 世纪课程教材。本次修订保持了第 2 版的主要内容和风格,以简明易懂为原则,同时适当地降低了一些难度。选学部分仍保留用 MATLAB 计算弹性力学问题的纲要和例题,在附录中保留了 MATLAB 简介。

本书力图用现代的、实用的观点组织教学内容,向学科前沿开设接口,在讲述方法上做了一些革新。全书共分 10 章,包括绪论、应力、应变、广义胡克定律、弹性力学边值问题、平面问题、能量原理及其应用、柱体的扭转、薄板问题和弹性力学专门问题。

本书可作为高等学校工科有关专业的弹性力学课程教材,也可供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学 / 杨桂通编著. -- 3 版. -- 北京:高等教育出版社, 2018.6 (2022.4 重印)
ISBN 978-7-04-049747-2

I. ①弹… II. ①杨… III. ①弹性力学-高等学校-教材 IV. ①O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 107363 号

策划编辑 水 渊 责任编辑 赵向东 封面设计 张 楠 版式设计 马敬茹
插图绘制 杜晓丹 责任校对 高 歌 责任印制 朱 琦

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 三河市华骏印务包装有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 16.75
字 数 290 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>
<http://www.hepmall.com>
<http://www.hepmall.cn>
版 次 1998 年 6 月第 1 版
2018 年 6 月第 3 版
印 次 2022 年 4 月第 2 次印刷
定 价 33.40 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 49747-00

第 3 版前言

本书初版于 1998 年,第 2 版于 2011 年出版,为适应弹性力学基础教学发展的需要,现修订出版第 3 版。

第 3 版的修订保持了第 2 版的主要内容和风格,以简明易懂为原则,同时适当地降低了一些难度。选学部分仍保留用 MATLAB 计算弹性力学问题的纲要和例题,在附录中保留了 MATLAB 简介。另外,在反复斟酌的基础上,对个别字、词以及表述作了修改;统一和规范了个别术语与符号;修改了部分插图,使图示更加清楚和完善。同时更正了第 2 版中的一些错误。

在本次修订中,为了学生自学方便,在比较复杂难懂的内容旁边增加了标注,引入二维码,扫描后可得到相关知识的解释和说明。本书实现了传统纸质教材与移动网络的有机结合,极大地丰富了知识的呈现形式,拓展了教材内容。

本书第一、七、八、十章(1~4 节)及附录 A、附录 B 由陈维毅修订,第二、三、四、五、六章由郭红梅修订,第九章由刘志芳修订,第十章第 5 节和附录 C 由王志华修订;二维码对应电子资源由陈维毅提供。全书由陈维毅统稿。

书中不当之处敬请读者指正。

编者
2017 年 10 月

第 2 版前言

本书第 1 版出版已有近 14 年了,在这段时间,我一直关注着弹性力学基础教育中的问题和发展趋势,以及与之相适应的教材建设问题,也有一些老师对这门课程的教材提出了很好的建议。因此有必要进行一次修订。

本次修订基本上保持了第 1 版的主要内容和风格,仍以简明易懂为原则,同时降低难度,删去艰涩内容,引进先进计算方法。例如,删去了复变函数方法及有关附录等。在选学部分则增加了用 MATLAB 软件计算弹性力学问题的纲要和例题,以附录形式补充了 MATLAB 简介。

在本次修订过程中,太原理工大学王志华教授和阎晓鹏博士根据他们在教学中的经验和体会给了我许多很好的建议和帮助,向他们表示感谢。

知名画家赵青教授再次为本书绘制了科学家肖像插图,她的作品为本书增加了光彩,谨致谢意。

清华大学徐秉业教授审阅了全部书稿,提出了许多宝贵的修改意见,在此致以衷心的感谢。

杨桂通

2011 年 5 月

HEP

第 1 版前言

我原想修订一次我那本 1980 年由高等教育出版社出版的《弹塑性力学》，因为 16 年过去了，还是经常有读者来信询问或求索。而我对那本书常感到有些欠缺，很想做一次认真的增删，为此也做了不少准备工作。但是有朋友建议我考虑为更广大的读者提供一本新的简明的弹性力学教材。我一直就在工业大学任教，多次为土木工程系的学生讲授弹性力学课程，后来又任太原工业大学^①校长十多年，对工科各专业的课堂教学和教材，特别是力学课程的教法、教材十分关注，也颇有感情。于是我接受了这个极好的建议。这样，为工科有关专业的学生写一本新的弹性力学教材，就成了我这一年来的一件大事。

当我开始动笔的时候，又感到有许多难处。因为弹性力学是固体力学学科中最基础、也是最重要的，理论性与应用性都很强，既是经典学科，又是发展中的、有生命力的学科，想让学生掌握和了解的内容似乎很多很多。此外，在培养一名工程师的整个教学过程中，所能给弹性力学课程安排的学时是有限的，所以内容的选取以及讲解方法放在什么层次上，如何反映新的时代特征，如何为学生进一步的学术追求打下基础，等等，都是难于裁定的重要问题。

“无边落木萧萧下，不尽长江滚滚来”。这本书在一种力量的推动下，现在已经问世了。在对本书的各种要求之下，我们选择了既强调系统、结构严谨、取材难易适度，又要概念清晰，简明易懂，尽量与现代文献接近，少列大套公式，避开数学难点，克服艰涩难懂、不得要领之弊端，希望它可供工科非力学专业弹性力学课程讲授 54 学时之用。全书共分十章，前九章是必读的。其中第十章扼要地介绍几个弹性力学的专门问题，主要是考虑工程应用和不同专业之需要，大部分不做严格推证。每一个专题按讲授 2 学时安排内容，作为选修，也可全部留给学生自学，不包括在 54 学时之内。此外，出于同一种考虑，我们在第六章安排了加注星号 * 的内容，也不作必修。此外还因为，在这几节中，所介绍的复变函数方法是解弹性力学平面问题最完美的一种方法，实难舍弃，而对某些相关专业来说还有取此而舍其他之便。

本书在完成过程中得到了我的学生和 friend 树学锋博士、马宏伟博士和其他应用力学研究所的同学、同事和朋友们的热情帮助；赵青女士绘制了肖像插图。作者对他们诚致谢意。

^① 1997 年太原工业大学与山西矿业学院合并为太原理工大学。

清华大学徐秉业教授以及河海大学卓家寿教授审阅了全部书稿,提出了许多宝贵修改意见。高等教育出版社有关同志对本书的出版给予了支持和帮助。作者在此一并向他们致以衷心的感谢。

杨桂通

1997年1月于太原工业大学



目 录

第一章 绪论	1
§ 1-1 弹性力学	1
§ 1-2 基本假定	1
§ 1-3 弹性力学的发展及研究方法	2
第二章 应力	4
§ 2-1 体力和面力	4
§ 2-2 应力与应力张量	5
§ 2-3 二维应力状态与平面问题的平衡方程	8
§ 2-4 一点处应力状态的描述	13
§ 2-5 边界条件	16
§ 2-6 主应力与主方向	18
§ 2-7 应力球张量与应力偏张量	22
本章复习要点	28
思考题	29
习题	29
第三章 应变	31
§ 3-1 变形与应变的概念	31
§ 3-2 主应变与主应变方向	37
§ 3-3 应变协调方程	39
本章复习要点	41
思考题	41
习题	42
第四章 广义胡克定律	44
§ 4-1 广义胡克定律	44
§ 4-2 拉梅常量与工程弹性常数	46
§ 4-3 弹性应变能函数	52
本章复习要点	54
思考题	55
习题	55
第五章 弹性力学边值问题	56
§ 5-1 基本方程	56

§ 5-2	问题的提法	58
§ 5-3	弹性力学问题的基本解法 解的唯一性	59
§ 5-4	圣维南原理	64
§ 5-5	叠加原理	65
	本章复习要点	67
	思考题	67
	习题	68
第六章	平面问题	69
§ 6-1	平面问题的基本方程	69
§ 6-2	应力函数 逆解法与半逆解法	71
§ 6-3	梁的弹性平面弯曲	75
§ 6-4	三角级数形式的弹性平面问题解答 深梁问题	82
§ 6-5	用极坐标表示的基本方程	87
§ 6-6	厚壁筒问题	91
§ 6-7	半无限平面体问题	94
§ 6-8	坝体应力	100
§ 6-9	圆孔孔边应力集中	104
	本章复习要点	109
	思考题	109
	习题	110
第七章	能量原理及其应用	112
§ 7-1	基本概念	112
§ 7-2	虚位移原理	114
§ 7-3	最小总势能原理	120
§ 7-4	虚应力原理	124
§ 7-5	最小总余能原理	127
§ 7-6	利用位移变分原理的近似解法	130
§ 7-7	利用应力变分原理的近似解法	137
§ 7-8	有限元法	139
	本章复习要点	143
	思考题	144
	习题	144
第八章	柱体的扭转	147
§ 8-1	问题的提出 基本关系式	147
§ 8-2	矩形截面柱体的扭转	151
§ 8-3	薄膜比拟法	156
§ 8-4	开口薄壁杆扭转问题的近似计算	157

本章复习要点	159
思考题	159
习题	159
第九章 薄板问题	161
§ 9-1 基本概念与基本假定	161
§ 9-2 薄板弯曲的平衡方程	165
§ 9-3 边界条件	170
§ 9-4 板的柱面弯曲	174
§ 9-5 矩形板的经典解法	177
§ 9-6 圆板的轴对称弯曲	184
本章复习要点	189
思考题	189
习题	190
*第十章 弹性力学专门问题	191
§ 10-1 布西内斯克问题	191
§ 10-2 赫兹接触问题	196
§ 10-3 简单热应力问题	199
§ 10-4 弹性波 初等理论	204
§ 10-5 用 MATLAB 软件计算弹性力学问题	208
本章复习要点	223
思考题	224
附录 A 下标记号法与求和约定	225
附录 B 变分法概要	227
附录 C MATLAB 简介	236
参考文献	241
外国人名译名对照表	244
索引	245
作者简介	

§ 1-1 弹性力学

弹性力学课程是材料力学课程的延续。弹性力学是固体力学的一个分支学科,是研究可变形固体在外力、温度变化和边界约束变动等作用下的弹性变形与应力状态的科学。所谓弹性,是指物体的应力与应变之间有着一一对应的关系,而且当外力除去后,物体的变形可恢复到原来的状态。在这门课程中,仅限于讨论理想弹性体,即应力与应变之间的关系为线性函数,也就是满足大家所熟知的胡克定律^①。当外力未超过某一限度时,大多数固体材料都具有这种属性。

实际上,在材料力学课程中已经用胡克定律讨论了各种简单的构件。在那里采用了一系列几何的和物理的简化假定,从而可以得到能满足一般工程使用的应力和位移的计算公式。弹性力学可不使用某些未加证明的假定便可以得到比材料力学更加精确的解答。一般说来,所讨论的物体的形状可以是任意的。

应当指出,这并不是说,弹性力学不再需要引进某些假设,相反,若不对具体工程对象进行抽象化,弹性力学仍然是寸步难行的。实际上,在本课程中仍必须引进某些假定并采取简化模型的形式进行研究。当然,这种模型应当在一定条件下反映了该研究对象的基本形态的主要力学特征。

学习本课程的目的主要是使学生掌握确定一般工程结构物体在外力下的变形、内力分布与承载能力的方法,以及为进一步研究工程结构的强度、振动、稳定性、破坏、失效等力学问题打下必要的理论基础。

§ 1-2 基本假定

应当指出,实际的固体材料通常有晶体与非晶体两种。晶体是由许多离子、原子按一定规则排列起来的空间点阵结构,它们中间常有一些缺陷存在。非晶体是由许多分子的集合组成的高分子化合物。物体中的缺陷、夹杂、孔洞等构成

^① 由胡克(Hooke, R.)于1678年提出。中国郑玄(公元127—200)在《考工记·弓人》的注中已提到这一概念(详见第四章关于郑玄的简介)。

了固体材料的微观结构的复杂性。本课程采用了物体的连续性假定和各向同性假定,不仅是为了避免数学分析上的困难,重要的是根据这些假定所作出的力学分析被广泛的试验与工程实践证实是可行的。

以后的讨论都是基于以下几项重要的基本假定:

(1) 连续性假定。即认为所研究的固体材料内各质点之间不存在空隙,物体的物质粒子连续地充满了物体所占的空间,且认为物体在变形后仍保持这种连续性。这样,物体的一切物理量,如密度、应力、应变、位移等都将是物体所占空间点的连续函数。

(2) 均匀性假定。即认为所研究的物体是由同一类型的均匀的固体材料所构成,其各部分的物理性质是相同的,并不因坐标位置的变化而变化。例如,物体的弹性性质处处都相同。这样,我们研究问题的时候,就可以从中取出任一单元来进行分析。

(3) 各向同性假定。在本课程中,均讨论各向同性的物体。即认为物体在各方向具有相同的物理性质,物体的弹性常数不随坐标方向的改变而变化。实际上,有不少材料不具有这种性质,像木材、竹材和某些人工加强后的构件等,本书不讨论这类问题。

(4) 小变形假定。即认为物体在外力或其他外部作用(如温度等)的影响下,物体所产生的变形,与其本身的几何尺寸相比属于高阶小量,可以不考虑因变形而引起的尺寸变化。这样,就可以用变形前的几何尺寸来代替变形后的尺寸,使得在进行力学分析时使问题大为简化。例如,在考虑应变和位移的关系时就可以略去位移公式中的二阶小量等,使基本方程线性化。

以上假定是本书讨论问题的基础,此外还有像完全弹性和无初始应力的假定等。超出以上范围的问题将有专门学科进行研究,如非线性弹性力学、塑性力学、各向异性体弹性力学等。

§ 1-3 弹性力学的发展及研究方法

近代弹性力学,可认为始于柯西(Cauchy, A. -L.)在1828年引进应变与应力的概念,建立了平衡微分方程、边界条件、应变与位移关系。它的发展进程对促进数学和自然科学基本理论的建立和发展,特别是对促进船舶、航空、建筑、水利、机械制造等工业技术的发展起了相当重要的作用。柯西的工作是近代弹性力学及近代连续介质力学的一个起点。之后,世界各国的一大批学者相继做出了重要贡献,使得弹性力学迅速发展起来,并根据实际的需要形成了一些专门分

支学科,如热弹性力学、弹性动力学、弹性系统的稳定理论、断裂力学、损伤力学等。

弹性力学为社会发展、人类的文明进步起了至关重要的作用。交通业、船舶制造、铁路建筑、机械制造、航空航天事业、水利工程、房屋建筑、军事工程等的发展,都离不开力学工作者的贡献。从18世纪开始,涌现出了一大批力学家,像柯西、欧拉(Euler, L.)、圣维南(Saint-Venant, A. J. C. B. de)、纳维(Navier, C. -L. -M. -H.)、基尔霍夫(Kirchhoff, G. R.)、拉格朗日(Lagrange, J. -L.)、勒夫(Love, A. E. H.)、铁摩辛柯(Timoshenko, S. P.)及钱伟长、钱学森、徐芝纶、胡海昌等。他们都对弹性力学的发展做出了贡献,他们的优秀著作培养了一代又一代的工程师和科学家。详见参考文献[45],[47]。

弹性力学虽是一门古老的学科,但现代科学技术的发展给弹性力学提出了越来越多的理论问题和工程应用问题,弹性力学在不少重要领域展现出它的重要性。本书将介绍其基本原理和实用的解题方法。

弹性力学问题的求解方法可分为三种类型:

(1) 数学方法

就是用数学分析的工具对给出的弹性力学边值问题进行求解,从而得出物体的应力场和位移场等。这种方法要解含未知量的偏微分方程,对很多问题的精确求解难度很大,故而常采用近似解法。例如,以后将介绍的基于能量原理的变分方法,其中主要是里茨(Ritz, W.)法、伽辽金(Galerkin, B. G.)法等。此外,还有所谓的逆解法和半逆解法。

另一种数学方法是数值方法。特别是广泛应用电子计算机以后,数值方法对大量的弹性力学问题十分有效。在数值方法中,常见的有差分法、有限元法及边界元法等。目前已广泛应用于弹性力学各类问题的计算中。

(2) 试验方法

就是利用机电方法、光学方法、声学方法、X射线衍射法等来测定结构部件在外力作用下应力和应变的分布规律,如光弹性法、云纹法等。

(3) 试验与数学相结合的方法

这种方法常用于形状非常复杂的弹性结构。例如,对结构的特殊部位的应力状态难以确定,可以用光弹性方法测定,作为已知量,置入数值计算中,特别是当边界条件难以确定时,则需两种方法结合起来,以求得可靠的解答。

本书主要介绍数学方法。

第二章

应 力

§ 2-1 体力和面力

作用在物体上的外力有两种类型,即面力和体力。所谓体力是作用在物体微粒体积上的力,称为质量力,如重力、惯性力、电磁力等。面力是沿着物体表面 S 上的分布力,如风力、液体压力、两物体间的接触力等。

为了表明物体在坐标系 $Oxyz$ 内的一点 C 所受体力的大小和方向,在 C 点的邻域取一包含 C 在内的微小体积元素 ΔV ,设 ΔV 的体力为 $\Delta \mathbf{F}$,则体力按体积计算的平均集度为 $\Delta \mathbf{F}/\Delta V$,当 ΔV 无限缩小而趋于 C 点时, $\Delta \mathbf{F}/\Delta V$ 将趋于一定的极限矢量 \mathbf{F}_b ,即

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta V} = \mathbf{F}_b \quad (2-1)$$

显然,体力矢量 \mathbf{F}_b 的方向就是 ΔV 内的体力的极限方向。体力的单位为 N/m^3 。

设 \mathbf{F}_m 是物体内部 C 点邻域单位质量的质量力,并令 $m = \rho dV$ 是体积 dV 物体微粒的质量, ρ 为质量密度,则 $m\mathbf{F}_m$ 是作用在 dV 中质量上的力,而单位体积的力 $\mathbf{F}_b = \rho \mathbf{F}_m$,称为体力。类似地讨论,可以给出一点 P 的面力矢量 \mathbf{p} 。为此,设在物体表面上一点 P 的邻域(含 P 在内)取微小面元 ΔS ,令 ΔS 上的面力为 $\Delta \mathbf{F}_s$,则面力的平均集度为 $\Delta \mathbf{F}_s/\Delta S$,则有(图 2-1)

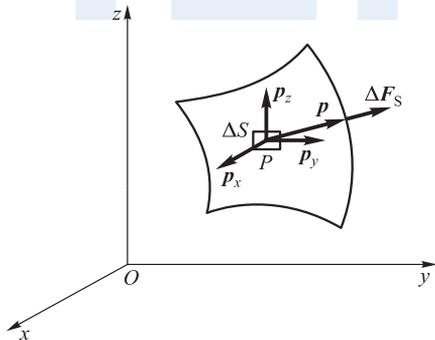


图 2-1

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_s}{\Delta S} = \mathbf{p} \quad (2-2)$$

此处 \mathbf{p} 是作用在物体单位面积上的面力矢量, 而作用在 dS 上的面力则为 $\mathbf{p}dS$ 。面力的单位为 N/mm^2 。

§ 2-2 应力与应力张量

在外力作用下, 物体将产生应力和变形, 也就是物体中诸元素之间的相对位置发生变化, 由于这种变化, 便产生了企图恢复其初始状态的附加相互作用力。用以描述物体在受力后任何部位的内力和变形的力学量是应力和应变。本章将讨论应力矢量和某一点处的应力状态。

为了说明应力的概念, 假想把受一组平衡力系作用的物体用一平面 C 分成 A 和 B 两部分(图 2-2)。如将 B 部分移去, 则 B 对 A 的作用应代之以 B 部分对 A 部分的作用力。这种力在 B 移去以前是物体内部 A 与 B 之间在截面 C 上的内力, 且为分布力。如从 C 面上点 P 处取出一包括点 P 在内的微小面积元素 ΔS , 而 ΔS 上的内力矢量为 $\Delta \mathbf{F}_s$, 则内力的平均集度为 $\Delta \mathbf{F}_s / \Delta S$, 如令 ΔS 无限缩小而趋于点 P , 则在内力连续分布的条件下 $\Delta \mathbf{F}_s / \Delta S$ 趋于一定的极限 $\boldsymbol{\sigma}$, 即

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_s}{\Delta S} = \boldsymbol{\sigma} \quad (2-3)$$

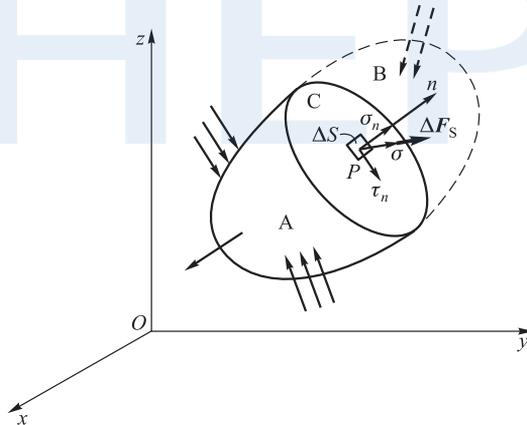


图 2-2

这个极限矢量 $\boldsymbol{\sigma}$ 就是物体在过 C 面上点 P 处的应力。由于 ΔS 为标量, 故

σ 的方向与 ΔF_s 的极限方向一致。

应力 σ 可分解为沿所在平面的外法线方向和切线方向的两个分量。沿应力所在平面的外法线方向 n 的应力分量称为正应力，记作 σ_n 。沿切线方向的应力分量称为切应力，记做 τ_n 。此处下标 n 标明其所在面的外法线方向，由此， ΔS 面上的正应力和切应力分别为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{S_n}}{\Delta S} \\ \tau_n &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{S_t}}{\Delta S} \end{aligned} \right\} \quad (2-4)$$

其中 $\Delta F_{S_n}, \Delta F_{S_t}$ 分别为 ΔS 上的内力矢量 ΔF_s 在平面 C 的法向和切向分量。

如果图 2-2 中 n 的方向与 y 坐标轴的方向一致(图 2-3)，则此时有

$$\sigma_n = \sigma_y \text{ 及 } \tau_n = \tau_y \quad (2-5)$$

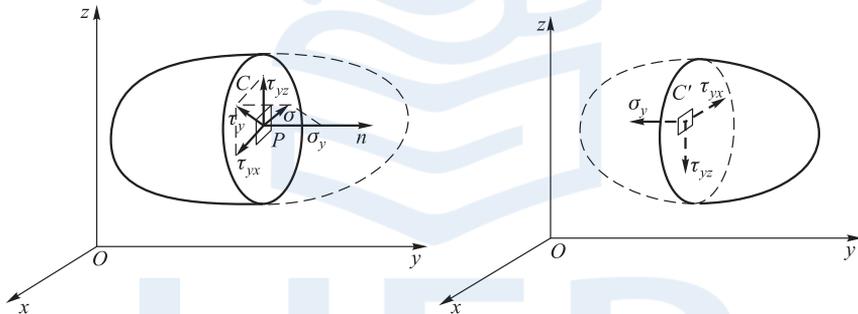


图 2-3

图 2-4

其中 τ_y 是作用在截面 C 内的切应力，如将 τ_y 分解为沿 x 轴和 z 轴的两个分量，并记作 τ_{yx} 和 τ_{yz} ，则过 C 面上点 P 的应力分量为 $\sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}$ 。以后，对正应力只用一个字母的下标标记，对切应力则用两个字母的下标标记，其中第一个字母表示应力所在面的外法线方向；第二个字母表示应力分量的指向。正应力的正负号规定为：拉应力为正，压应力为负。切应力的正负号规定分为两种情况：当其所在面的外法线与坐标轴的正方向一致时，则以沿坐标轴正方向的切应力为正，反之为负；当所在面的外法线与坐标轴的负方向一致时，则以沿坐标轴负方向的切应力为正，反之为负。图 2-3 及图 2-4 中的各应力分量均为正。应力及其分量的单位为 Pa。

在以上的讨论中，过点 P 的平面 C 是任选的。显然，过点 P 可以做无穷多个这样的平面 C 。或者说，过点 P 有无穷多个连续变化的 n 方向。不同面上的应力是不同的。这样，就产生了一个到底如何描绘一点处的应力状态的问题。

下面讨论这个问题。

为了研究点 P 处的应力状态,在点 P 处沿坐标轴 x, y, z 方向取一个微小的平行六面体(图 2-5),其 6 个面的外法线方向分别沿 3 个坐标轴的正负方向,各边长分别为 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 。假定应力在各面上均匀分布,于是各面上的应力便可用作用在各面中心点的一个应力矢量来表示,每个面上的应力矢量又可分解为 1 个正应力和 2 个切应力分量。按前面约定的表示法,图 2-5 给出的各应力分量均为正方向。

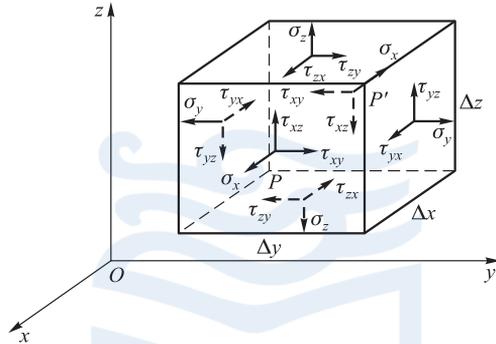


图 2-5

由图 2-5 可知,当微小的平行六面体趋于无穷小时,六面体上的应力就代表点 P 处的应力。因此,点 P 处的应力分量共有 9 个,其中有 3 个正应力分量、6 个切应力分量(以后将证明切应力互等定理,从而,实际上独立的切应力分量只有 3 个)。把这 9 个应力分量按一定规则排列,令其中每一行为过点 P 的一个面上的 3 个应力分量,即

$$\begin{array}{ccc}
 \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\
 \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\
 \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z
 \end{array} \quad (2-6)$$

以上这 9 个应力分量定义为一个新的量 Σ ,它描绘了一种物理现象,即点 P 处的应力状态。 Σ 是对坐标系 $Oxyz$ 而言的,当坐标系变换时,它们按一定的变换式变换成另一坐标系 $Ox'y'z'$ 中的 9 个量,即

$$\begin{array}{ccc}
 \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\
 \tau_{y'x'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\
 \tau_{z'x'} & \tau_{z'y'} & \sigma_{z'}
 \end{array}$$

这 9 个分量描绘同一点 P 的同一物理现象,所以它们定义的仍为 Σ 。而 $\sigma_x, \sigma_y, \dots$ 这 9 个量就称为 Σ 的元素。数学上,在坐标变换时,服从一定坐标变

换式的 9 个量所定义的量称为二阶张量。根据这一定义, Σ 是一个二阶张量, 并称为应力张量。容易证明, 应力张量为一对称二阶张量。各应力分量即为应力张量的元素。在 § 2-3 中将给出应力分量在坐标变换时服从的变换公式。

应力张量通常表示为

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (2-7)$$

其中 $i, j = x, y, z$, 当 i, j 任取 x, y, z 时, 便得到相应的分量^①。

式(2-7)与 3×3 阶的矩阵写法相同。如令 i 代表行, j 代表列, 行列数 1, 2, 3 对应于 x, y, z 。例如, 第二行第三列的元素为 τ_{23} , 即应力分量为 τ_{yz} , 其余类推。

应当指出, 物体各点的应力状态, 一般说来是不同的, 即非均匀分布的, 亦即各点的应力分量应为坐标 x, y, z 的函数。所以, 应力张量 σ_{ij} 与给定点的空间位置有关, 谈到应力张量总是针对物体中的某一确定点而言的, 以后将看到, 应力张量 σ_{ij} 完全确定了一点处的应力状态。

张量符号与下标记号法使冗长的弹性力学公式变得简明醒目, 在文献中已被广泛应用, 今后将逐渐熟悉这种标记法。

§ 2-3 二维应力状态与平面问题的平衡方程

上一节中讨论力和应力概念时, 是从三维受力物体出发的, 其中点 P 是从一个三维空间中取出来的点。现为简单起见, 首先讨论平面问题。掌握了平面问题以后, 再讨论空间问题就比较容易了。

平面问题的特点是物体所受的面力和体力及其应力都与某一个坐标轴(例如 z 轴)无关。平面问题又分为平面应力问题与平面应变问题。

在平面应力问题中, 所考虑的物体是一个很薄的平板, 荷载只作用在板边, 且平行于板面(图 2-6), 即 z 方向的体力分量 F_{bz} 及面力分量 F_{sz} 均为零。故如取图 2-6 中的坐标系, 则板面上($z = \pm\delta/2$ 处)应力分量为

$$(\sigma_z)_{z = \pm\frac{\delta}{2}} = 0$$

^① $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ 已简写为 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 。此外, 张量有多种记法, 为简便计, 今后用分量记法(也称指标记法), 如将 (σ_{ij}) 记作 σ_{ij} 。



[标注 2-1:
张量的定义]

$$(\tau_{zx})_{z=\pm\frac{\delta}{2}} = (\tau_{zy})_{z=\pm\frac{\delta}{2}} = 0$$

由于板的厚度很小,外荷载又沿厚度均匀分布,所以可以近似地认为应力沿厚度均匀分布。由此,在垂直于 z 轴的任一微小面积上均有

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

根据后面将要证明的切应力互等定理,即应力张量的对称性,还有 $\tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$ 。这就是说,过任一点处不等于零的应力分量只有 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}$,且均为 x, y 的函数。此时,应力张量为

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

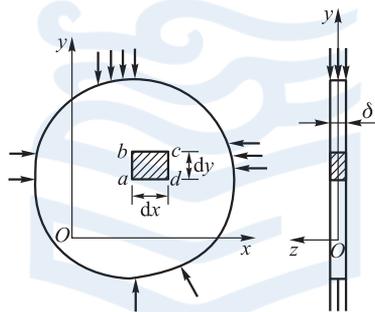


图 2-6

现在讨论平面应变问题。设有等截面柱体,其纵轴方向 (Oz 坐标方向) 很长。外荷载及体力为作用在垂直于 Oz 方向的且沿 z 轴均匀分布的一组力。图 2-7 所示的挡土墙是这类问题的典型例子。如略去端部效应,则由于外荷载沿 z 轴方向为一常数,故可以认为,沿纵轴方向各点的位移与其所在 z 方向的位置无关,就是说 z 方向各点的位移均相同。如令 u, v, w 分别为一点在 x, y, z 坐标方向的位移分量,则有 $w = \text{常数}$, 等于常数的位移 w 并不伴随产生任一 xy 平面的翘曲变形,故研究应力、应变问题时,可取 $w = 0$ 。此外,由于物体的变形只在 Oxy 平面内产生,故 u, v 均与 z 无关。因而,对于平面应变状态有

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, y) \\ v &= v(x, y) \\ w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

这时,任一垂直于 z 轴的横截面都为对称面,因此,过任一点处的应力分量 $\tau_{xz} (= \tau_{zx}), \tau_{yz} (= \tau_{zy})$ 均等于零,但由于 z 方向对变形的约束,故 σ_z 一般不等于零。此时,应力张量为

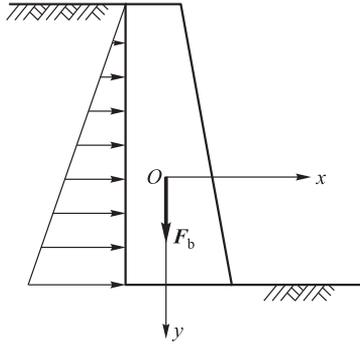


图 2-7

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}$$

实际上,以后将证明, σ_z 不是一个独立的量,它可以由 σ_x 和 σ_y 求出。所以不管是平面应力问题还是平面应变问题,独立的应力分量只有 3 个,即 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} (= \tau_{yx})$, 在求解过程中, σ_z 可暂不考虑。

下面讨论物体处于平衡状态时,各点应力及体力的相互关系,并由此导出平衡方程。假定从处于平面应力状态的物体中取出一个微小矩形单元 $abcd$ (图 2-6 中的阴影部分),其两边的长度分别为 dx, dy ,厚度就是原物体的厚度 δ (图 2-6)。这里因 $dx\delta, dy\delta$ 为微小面元,可以把 $dx\delta$ 和 $dy\delta$ 上的应力看成是均匀分布的,故面元上任意点的应力分量值,可以用该面元中点的应力分量表示(图 2-8)。在此微小单元体上,不同的边上,应力分量的值也不相同,如 ab 边上的正应力分量 σ_x ,而 cd 边上,由于距 y 轴的距离增加了 dx ,故其正应力分量应随之变化。应力分量的这种变化可用泰勒(Taylor, G. I.) 级数展开来求。即有

$$\sigma_x \Big|_{cd} = \sigma_x \Big|_{ab} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \Big|_{ab} dx + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} \Big|_{ab} dy + o(dx^2, dy^2)$$

注意到, ab 线元与 cd 线元上的应力分量,皆可用相应线元中点处的应力分量来表示,故可写出

$$\sigma_x \Big|_{cd} = \sigma_x \Big|_{x+dx}, \quad \sigma_x \Big|_{ab} = \sigma_x \Big|_x$$

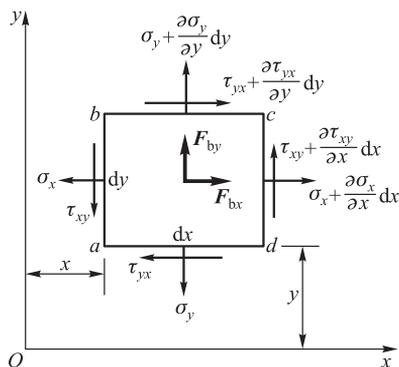


图 2-8

略去二阶以上微量,有^①

$$\sigma_x \Big|_{x+dx} = \sigma_x \Big|_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \Big|_x dx$$

亦即,如 ab 边上的正应力为 σ_x ,则 cd 边上的正应力为

$$\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$$

同理,如 ab 边上的切应力分量为 τ_{xy} , ad 边的 2 个应力分量为 σ_y 及 τ_{yx} ,则得 cd 边上的切应力分量及 bc 边的 2 个应力分量分别为(图 2-8)

$$\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx$$

$$\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy$$

$$\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy$$

在静力平衡条件下,各应力分量必然满足平衡条件的要求。为简便起见,取微小矩形单元 $abcd$ 的厚度 $\delta=1$ (图 2-8),由平衡条件 $\sum M_a=0$,得

$$\left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy dx \right) \frac{dx}{2} - \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy \right) \frac{dy}{2} + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy dx -$$

① 由于线元 cd 和 ab 只有 dx 之差,并无 y 坐标之不同,故有

$$\sigma_x \Big|_{cd} = \sigma_x \Big|_{ab} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \Big|_{ab} dx$$

$$\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx dy + F_{by} dx dy \frac{dx}{2} - F_{bx} dx dy \frac{dy}{2} = 0$$

略去 dx, dy 的三次方的项, 得

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2-9)$$

这就是前面曾经提到的切应力互等定理^①。以下常不再区分 τ_{xy} 和 τ_{yx} , 余类推。

由平衡条件 $\sum F_x = 0$, 得

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dy - \sigma_x dy + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx - \tau_{yx} dx + F_{bx} dx dy = 0$$

化简后为

$$\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_{bx}\right) dx dy = 0$$

其中 $dx dy$ 不等于零, 故有

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_{bx} = 0 \quad (2-10a)$$

同理由 $\sum F_y = 0$, 得

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + F_{by} = 0 \quad (2-10b)$$

上式(2-10)是平面问题的平衡方程。

对于三维应力状态的情况, 可从受力物体中取出一微小六面体单元, 可类似地导出(具体推导, 留作练习)

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (2-11)$$

及

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_{bx} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_{by} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_{bz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-12)$$

上式(2-12)为三维情况下的平衡方程。

如采用张量符号与下标记号法, 则切应力互等定理可缩写为

^① 这里限于讨论“非极性”介质, 对于微极性介质, 切应力互等定理将不再成立。详见文献[40]第三章。

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (i, j = x, y, z) \quad (2-13)$$

由此可知,应力张量为一对称张量,其中只有 6 个独立元素,即

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

在平面应力状态,有

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

平衡方程(2-12)可缩写为

$$\sigma_{ij,j} + F_{bi} = 0 \quad (2-14)$$

其中 $\sigma_{ij,j} = \partial\sigma_{ij}/\partial x_j$, 下同。

在式(2-14)中,除了引用了偏导数的缩写方法外,同时采用了重复下标表示求和约定,如 σ_{ii} 就表示将 i 取 1, 2, 3 (x, y, z) 之后,将所得的各项加起来,即 $\sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} (= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ 。这种求和约定对含有导数的表达式也适用。在式(2-14)中等号左边第一项中的下标 j 是重复下标,应按求和约定对 $j (= x, y, z)$ 求和,即应有

$$\sigma_{ij,j} = \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial\sigma_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{iz}}{\partial z} \quad (i = x, y, z)$$

所以, $\sigma_{ij,j} = 0$ 就代表

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} = 0$$

同理式(2-14)就代表式(2-12)(下标记号法与求和约定详见附录 A)。

§ 2-4 一点处应力状态的描述

现以平面问题为例说明一点处应力状态的描述。为此,在受力物体中取一个微小三角形单元,如图 2-9 所示,其中 AB, AC 与坐标 y, x 重合,而 BC 的外法

线与 x 轴成 θ 角。取 x', y' 坐标, 使 BC 的外法线方向与 x' 方向重合 (图 2-9)。在这种情况下, 如果 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 已给定, 则 BC 面上的正应力 $\sigma_{x'}$ 与切应力 $\tau_{x'y'}$ 可用已知量表示, 由于 θ 角的任意性, 则当 BC 面趋于点 A 时, 便可以求得描绘过点 A 处的应力状态的表达式。

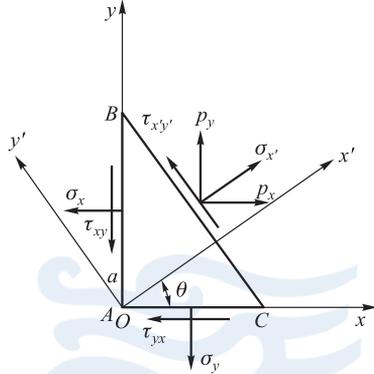


图 2-9

实际上, 此处所讨论的问题, 是一点处不同方向的面上的应力的转换, 即 BC 面无限趋于点 A 时, 该面上的应力如何用与原坐标相平行的面上的应力来表示。在这种问题的分析中, 可不必引入应力增量和体力, 因为它们与应力相比属于小量。

假定 BC 的面积为 1, 则 AB 和 AC 的面积分别为 $\cos \theta$ 与 $\sin \theta$ 。于是, 由平衡条件 $\sum F_x = 0$ 和 $\sum F_y = 0$, 可得

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta \\ p_y &= \tau_{xy} \cos \theta + \sigma_y \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (2-15)$$

其中 p_x, p_y 为 BC 面上单位面积的力 \boldsymbol{p} 在 x, y 方向的投影 (图 2-9)。把 p_x, p_y 投影到 x', y' 坐标方向, 得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x'} &= p_x \cos \theta + p_y \sin \theta \\ \tau_{x'y'} &= p_y \cos \theta - p_x \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (2-16)$$

将式 (2-15) 代入式 (2-16), 得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x'} &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \tau_{x'y'} &= \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (2-17)$$

或改写为

$$\sigma_{x'} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (2-18a)$$

$$\tau_{x'y'} = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (2-18b)$$

把式(2-18a)中的 θ 换成 $\theta + \frac{\pi}{2}$, 则得

$$\sigma_{y'} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (2-18c)$$

上式(2-18)在材料力学中曾经讨论过,并给出了莫尔圆的作图法。于是,当 BC 面趋于点 A 时,若已知点 A 的应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$,则由式(2-18)即可求得过该点任意方向平面上的应力分量。换言之,对于平面问题,式(2-18)充分地描述了一点处的应力状态。

在三维的情况下,在任意一点 O 附近取出一微小四面体单元 $OABC$,斜面 ABC 的外法线为 n (图 2-10)。如令斜面 ABC 的面积为 1,则三角形 $OBC, OAC,$

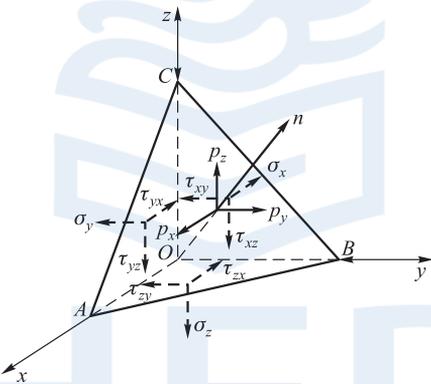


图 2-10

OAB 的面积分别为

$$\begin{aligned} 1 \times \cos(n, x) &= l_1 \\ 1 \times \cos(n, y) &= l_2 \\ 1 \times \cos(n, z) &= l_3 \end{aligned}$$

如 ABC 面上的单位面积的面力为 p , 其沿坐标轴方向的分量用 p_x, p_y, p_z 表示, 则不难由微小四面体单元的平衡条件得出

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \sigma_x l_1 + \tau_{xy} l_2 + \tau_{xz} l_3 \\ p_y &= \tau_{yx} l_1 + \sigma_y l_2 + \tau_{yz} l_3 \\ p_z &= \tau_{zx} l_1 + \tau_{zy} l_2 + \sigma_z l_3 \end{aligned} \right\} \quad (2-19)$$

上式(2-19)按下标记号法与求和约定可缩写为



[标注 2-2:
应力分量下标
的物理含义]

$$p_i = \sigma_{ij}n_j \quad (i, j = x, y, z) \quad (2-19')$$

此处 n_j 为斜面 ABC 外法线 n 与 $j(=x, y, z)$ 轴间夹角的方向余弦 $\cos(n, j)$, 根据以上定义, 有

$$n_x = \cos(n, x) = l_1$$

$$n_y = \cos(n, y) = l_2$$

$$n_z = \cos(n, z) = l_3$$

以上讨论的是在空间坐标系 $Oxyz$ 内与坐标轴呈任意倾斜的面上单位面积的面力 p_x, p_y, p_z 的表达式 (2-19)。现在考虑当坐标系 $Oxyz$ 变换到坐标系 $Ox'y'z'$ 时, 新旧坐标系内各应力分量间的关系。并由此给定应力张量的各元素在坐标变换时所遵循的法则。

为此, 令新坐标系 $Ox'y'z'$ 的 Ox' 轴与图 2-10 中的 n 方向相合, 新旧坐标系间的方向余弦为 $l_{1'1} = \cos(x', x), l_{1'2} = \cos(x', y), \dots$, 如表 2-1 所示, 则 x' 方向的面力 $\sigma_{x'}$ 为

$$\sigma_{x'} = p_x l_{1'1} + p_y l_{1'2} + p_z l_{1'3}$$

将式 (2-19) 代入上式, 并注意到其中之 l_1, l_2, l_3 分别等于 $l_{1'1}, l_{2'2}, l_{3'3}$, 则得

$$\sigma_{x'} = \sigma_x l_{1'1}^2 + \sigma_y l_{1'2}^2 + \sigma_z l_{1'3}^2 + 2(\tau_{xy} l_{1'1} l_{1'2} + \tau_{yz} l_{1'2} l_{1'3} + \tau_{xz} l_{1'1} l_{1'3})$$

表 2-1

	x	y	z
x'	$l_{1'1}$	$l_{1'2}$	$l_{1'3}$
y'	$l_{2'1}$	$l_{2'2}$	$l_{2'3}$
z'	$l_{3'1}$	$l_{3'2}$	$l_{3'3}$

类似地, 由 p_x, p_y, p_z 在 y', z' 方向的投影, 可得用 $\sigma_{ij}(i, j = x, y, z), l_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ 表示的 $\tau_{x'y'}, \tau_{x'z'}$, 之后将 y' 轴与 n 方向重合, 类似地可得用 σ_{ij}, l_{ij} 表示的 $\sigma_{y'}, \tau_{y'x'}, \tau_{y'z'}$, 再将 z' 轴与 n 方向重合, 可得用 σ_{ij}, l_{ij} 表示的 $\sigma_{z'}, \tau_{z'x'}, \tau_{z'y'}$, 这样最终可得用 σ_{ij}, l_{ij} 表示的全部 $Ox'y'z'$ 坐标系内的应力分量, 即

$$\sigma_{i'j'} = l_{i'i} l_{j'j} \sigma_{ij} \quad (2-20)$$

此即在应力分量随坐标变换的法则。

凡一组 9 个量 σ_{ij} , 在坐标变换时服从式 (2-20) 给出的法则, 就称为二阶张量。



[标注 2-3:
应力分量随
坐标变换的
公式推导]

§ 2-5 边界条件

当物体处于平衡状态时, 其内部各点的应力状态应满足平衡微分方程

(2-12), 在边界上应满足边界条件。边界条件可能有三种情况: (1) 在边界上给定面力; (2) 在边界上给定位移; (3) 在边界上部分给定面力, 部分给定位移。第一种称为应力边界条件; 第二种称为位移边界条件; 第三种称为混合边界条件。下面分别以平面问题为例给出这几种边界条件的表示法。

一、应力边界条件

当物体的边界上给定面力时(以后称给定面力的边界为 S_σ), 则物体边界上的应力应满足与面力相平衡的力的平衡条件。如边界附近有一点 A , 物体的坐标系为 Oxy (图 2-9), 边界线为 BC , 其外法线方向为 n ; A 点的应力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 的值尚为未知, BC 面上单位面积的面力为 \bar{p} , 其在 x, y 方向的分量分别为 \bar{p}_x, \bar{p}_y , 当点 A 无限趋于 BC 时, 由应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 与面力 \bar{p}_x, \bar{p}_y 之间的平衡条件可得应力边界条件。 BC 的外法线方向为 n , 它的方向余弦为 $\cos(n, x) = l_1, \cos(n, y) = l_2$, 则式(2-15)可改写为

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_x &= \sigma_x l_1 + \tau_{xy} l_2 \\ \bar{p}_y &= \tau_{xy} l_1 + \sigma_y l_2 \end{aligned} \right\} \quad (2-15')$$

在三维条件下, 则可由边界附近任取一微小四面体 $OABC$, 如图 2-10 所示。如面力已知为 \bar{p} , 则相应的应力边界条件为式(2-19)

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_x &= \sigma_x l_1 + \tau_{xy} l_2 + \tau_{xz} l_3 \\ \bar{p}_y &= \tau_{yx} l_1 + \sigma_y l_2 + \tau_{yz} l_3 \\ \bar{p}_z &= \tau_{zx} l_1 + \tau_{zy} l_2 + \sigma_z l_3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{在 } S_\sigma \text{ 上}) \quad (2-19)$$

即

$$\bar{p}_i = \sigma_{ij} n_j \quad (\text{在 } S_\sigma \text{ 上}) \quad (2-19')$$

此处 $n_j = \cos(x_j, n)$, 从应力边界条件的表达式(2-15')或(2-19)可以看出应力边界条件与坐标系 $Oxyz$ 的选取及物体边界的方向余弦有关。

对于平面问题, 当边界与某一坐标轴相垂直时, 应力边界条件可得到简化, 在垂直于 x 轴的边界上 n 与 x 轴方向重合, 故有 $l_1 = \cos(n, x) = \pm 1, l_2 = \cos(n, y) = 0$, 于是式(2-15)简化成为

$$\sigma_x = \pm \bar{p}_x, \quad \tau_{xy} = \pm \bar{p}_y$$

同理在垂直于 y 轴的边界上, 由于 n 与 y 轴方向重合, 故有

$$l_1 = \cos(n, x) = 0, \quad l_2 = \cos(n, y) = \pm 1$$

应力边界条件可化为

$$\sigma_y = \pm \bar{p}_y, \quad \tau_{yx} = \pm \bar{p}_x$$

在这种情况下, 边界处应力分量的数值与单位面积上的面力分量相等。且当边

界的外法线方向沿坐标轴的正向时,取正号;反之取负号。

二、位移边界条件

当边界上已知位移时,应建立物体边界上点的位移与给定位移相等的条件。如令给定位移的边界为 S_u ,则有(在 S_u 上)

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v} \quad (2-21)$$

其中 \bar{u}, \bar{v} 分别为边界上 x, y 方向的已知位移分量。

对于三维问题,位移边界条件为(在 S_u 上)

$$u_i = \bar{u}_i \quad (2-22)$$

此处 $i=1, 2, 3$ (u_1, u_2, u_3 与 u, v, w 相对应)。

三、混合边界条件

混合边界条件有两种情况。一种情况是在物体的整个边界 S 上,一部分已知应力,即给定应力的边界 S_σ ,此部分边界应用应力边界条件(2-19),其余部分给定位移,即给定位移的边界 S_u , S_u 上用位移边界条件(2-22)。这时相当于给了两种边界。另一情况是在同一部分边界上已知部分位移和部分应力,即给定位移与应力混合条件。图 2-11 给出的由一组连杆支承深梁就是这种情况,已知 AB 面上 y 方向的位移及 x 方向切应力均等于零,即(在 S_{AB} 上)

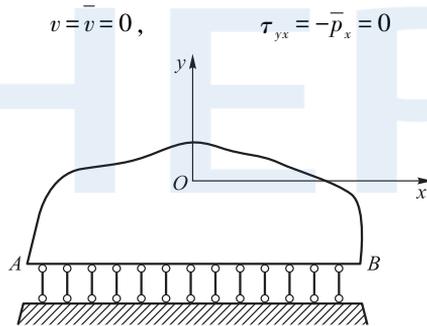


图 2-11

§ 2-6 主应力与主方向

在受力物体内一点任意方向的微小面元上,一般都有正应力和切应力,不同

方向的面元上这些应力有不同的数值。当此微小面元转动时,它的法线方向 n 随之改变,面元上的正应力 σ_n 和切应力 τ_n 的方向和它们的值也都要发生变化。在 n 方向不断改变的过程中,必然要出现这样的情况,即面元上只有正应力 σ_n ,而切应力 τ_n 等于零。把这时面元的法线方向 n 称为主方向,相应的正应力 σ_n 称为主应力, σ_n 所在的面称为主平面。以下将说明,物体中任一点都有 3 个主应力和相应的 3 个主方向。

在图 2-10 中,如令 p_x, p_y, p_z 为 ABC 面上单位面积面力 p 的 3 个分量,则有

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \quad (\text{a})$$

ABC 面上的正应力 σ_n 即为

$$\sigma_n = p_x l_1 + p_y l_2 + p_z l_3 \quad (\text{b})$$

将式(2-19)代入式(b),得

$$\begin{aligned} \sigma_n &= (\sigma_x l_1 + \tau_{xy} l_2 + \tau_{xz} l_3) l_1 + (\tau_{yx} l_1 + \sigma_y l_2 + \tau_{yz} l_3) l_2 + \\ &\quad (\tau_{zx} l_1 + \tau_{zy} l_2 + \sigma_z l_3) l_3 \\ &= \sigma_x l_1^2 + \sigma_y l_2^2 + \sigma_z l_3^2 + 2(\tau_{xy} l_1 l_2 + \tau_{yz} l_2 l_3 + \tau_{xz} l_1 l_3) \end{aligned} \quad (2-23)$$

式(2-23)为 n 方向(亦即任意方向)的斜面上的正应力的表达式。该面上的切应力为

$$\tau_n^2 = p^2 - \sigma_n^2 \quad (2-24)$$

将式(a)及式(2-23)代入上式,可得法线方向为 n 的面上的切应力。

如果在一个斜面上的切应力为零,即 $\tau_n = 0$,则从式(2-24)有 $\sigma_n^2 = p^2$,此时该斜面上的正应力 σ_n 就是主应力。在这种情况下该斜面上的正应力 σ_n 即与 p 的大小和方向完全相同^①。于是有

$$\left. \begin{aligned} p_x &= p l_1 = \sigma_n l_1 \\ p_y &= p l_2 = \sigma_n l_2 \\ p_z &= p l_3 = \sigma_n l_3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{c})$$

将式(c)代入式(2-19),得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x l_1 + \tau_{xy} l_2 + \tau_{xz} l_3 &= \sigma_n l_1 \\ \tau_{xy} l_1 + \sigma_y l_2 + \tau_{yz} l_3 &= \sigma_n l_2 \\ \tau_{xz} l_1 + \tau_{yz} l_2 + \sigma_z l_3 &= \sigma_n l_3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{d})$$

上式可改写为

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_n) l_1 + \tau_{xy} l_2 + \tau_{xz} l_3 &= 0 \\ \tau_{xy} l_1 + (\sigma_y - \sigma_n) l_2 + \tau_{yz} l_3 &= 0 \\ \tau_{xz} l_1 + \tau_{yz} l_2 + (\sigma_z - \sigma_n) l_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-25)$$

^① 该斜面的面积取为 1。

或

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_n)l_j = 0 \quad (2-25')$$

此处 δ_{ij} 为克罗内克符号 (Kronecker delta symbol) δ , 定义为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{当 } i = j \\ 0 & \text{当 } i \neq j \end{cases}$$

l_1, l_2, l_3 满足下列关系式

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1 \quad (2-26)$$

于是得到了含有 σ_n, l_1, l_2, l_3 未知数的 4 个方程 (2-25) 和 (2-26), 求解之后便可得到主应力及与之对应的主方向。现在用下述方法来讨论问题的解。由于式 (2-26) 说明 l_1, l_2, l_3 这 3 个方向余弦不可能同时等于零, 所以式 (2-25) 可看成关于 l_1, l_2, l_3 的线性齐次方程组, 而且应当有非零解存在。由齐次方程组有非零解的条件得到

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_n & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_n & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_n \end{vmatrix} = 0 \quad (2-27)$$

上式展开后, 得

$$(\sigma_x - \sigma_n)(\sigma_y - \sigma_n)(\sigma_z - \sigma_n) + \tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} + \tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} - \tau_{xz}(\sigma_y - \sigma_n)\tau_{xz} - \tau_{yz}\tau_{yz}(\sigma_x - \sigma_n) - \tau_{xy}\tau_{xy}(\sigma_z - \sigma_n) = 0$$

或

$$\sigma_n^3 - I_1\sigma_n^2 + I_2\sigma_n - I_3 = 0 \quad (2-28)$$

其中

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (2-29a)$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 \quad (2-29b)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (2-29c)$$

方程 (2-28) 是关于 σ_n 的三次方程, 它的 3 个根, 即为 3 个主应力, 其相应的 3 组方向余弦对应于 3 组主平面。方程 (2-28) 的 3 个根都是实根, 因为, 式 (2-25) 说明主应力是应力张量 σ_{ij} 的特征值, 式 (2-27) 或式 (2-28) 为特征方程。因应力张量为对称张量, 其各元素均为实数, 故必有实特征根, 即 3 个主应力都是实数, 其方向余弦为应力张量 σ_{ij} 的特征向量。方程 (2-28) 的 3 个根均为实数的证明还可以从三次方程根的性质代数理论中得到。至于其方向, 可以通过将 3 个主应力分别代入式 (2-25) (即将主应力 σ 换 σ_n), 再利用式 (2-26) 而求得。



[标注 2-4:
证明实对称
矩阵的特征
值是实数]

可以证明,若 3 个主应力互不相等,即方程(2-28)无重根,则它们的方向即主方向,必相互垂直。还可以进一步讨论方程(2-28)有 2 个或 3 个重根的情况^①。

主应力的大小与坐标选择无关,故方程(2-28)的 3 个系数 I_1, I_2, I_3 也与坐标选择无关,否则,主应力就要随坐标选择的不同而变化,所以 I_1, I_2, I_3 为不变量,分别称为第一、第二、第三应力张量不变量,简称应力不变量。

解式(2-28)后,得到所考虑点的 3 个主应力,从大到小记为 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, 即 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 。

如果坐标轴恰与主方向重合,则应力不变量用主应力表示为

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3 \\ I_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned} \right\} \quad (2-30)$$

以主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 的方向为坐标轴(记为 1, 2, 3)的几何空间,称为主向空间或主应力空间。要了解在主向空间任意斜面上的应力,可假定某一斜面的应力矢量为 \boldsymbol{p} , 该斜面的方向余弦为 l_1, l_2, l_3 (图 2-10), 注意到 \boldsymbol{p} 在坐标轴方向的 3 个投影分别为 $p_1 = \sigma_1 l_1, p_2 = \sigma_2 l_2, p_3 = \sigma_3 l_3$, 于是该面上的正应力 σ 与切应力 τ 的关系为

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= p^2 - \tau^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - \tau^2 \\ &= \sigma_1^2 l_1^2 + \sigma_2^2 l_2^2 + \sigma_3^2 l_3^2 - \tau^2 \end{aligned} \quad (2-31)$$

由于

$$\sigma = p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 = \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 l_2^2 + \sigma_3 l_3^2 \quad (2-32)$$

故有

$$\tau = \sqrt{\sigma_1^2 l_1^2 + \sigma_2^2 l_2^2 + \sigma_3^2 l_3^2 - (\sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 l_2^2 + \sigma_3 l_3^2)^2} \quad (2-33)$$

现在讨论一种特殊情况,即在主向空间取一斜面,该斜面的法线 n 与 3 个坐标轴呈等倾斜,即

$$l_1 = l_2 = l_3$$

由于

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1$$

故

$$l_1 = l_2 = l_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

或

^① 详见参考文献[17]。

$$\arccos l_1 = \arccos l_2 = \arccos l_3 = 54^\circ 44'$$

在这个三维空间中的上半空间(xy 平面以上, 即 z 的正方向)可构成 4 个这样的面, 在下半空间(xy 平面以下, 即 z 的负方向)也可构成 4 个这样的面, 共有 8 个, 这 8 个面组成了一个正八面体, 其中每一个面称为八面体平面。图 2-12 给出了八面体的图形。

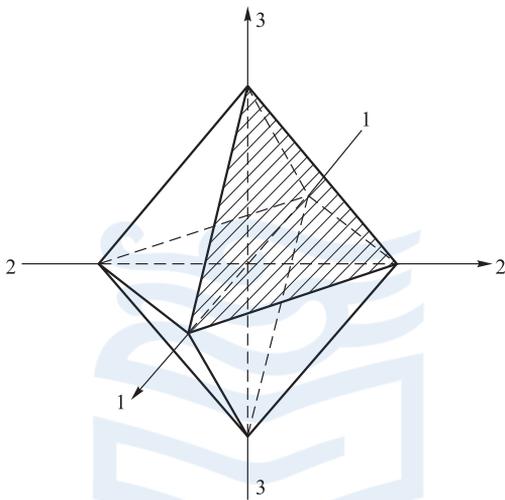


图 2-12

鉴于八面体平面上的应力的特殊性, 下面给出八面体平面上的正应力和切应力。八面体平面上的正应力 σ_8 由式(2-32), 得

$$\sigma_8 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (2-34)$$

由式(2-33), 得八面体面上的切应力为

$$\tau_8 = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \quad (2-35)$$

一般情况为

$$\tau_8 = \frac{1}{3} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)]^{\frac{1}{2}} \quad (2-35')$$



[标注 2-5:
式(2-35')
的证明]

§ 2-7 应力球张量与应力偏张量

在外力作用下, 物体的变形, 通常可分为体积改变和形状改变两种成分, 并

且认为体积的改变是由于各向相等的应力引起的。试验证明, 固体材料在各向相等的应力作用下, 一般都表现为弹性性质^①。因而可以认为, 材料的非弹性变形主要是物体产生形状变化时产生的。这样, 在塑性理论中, 常要根据这一特点把应力状态进行分解。

在一般情况下, 某一点处的应力状态可以分解为两部分, 一部分是各向相等的压(或拉)应力 σ_{ii} , 另一部分记为 s_{ij} , 即

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ii} + s_{ij} \quad (2-36)$$

其中

$$\sigma_{ii} = \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix}$$

$$s_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_m \end{pmatrix}$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_s$$

σ_{ii} 可定义为球形应力张量, 简称应力球张量。而 s_{ij} 则称为偏斜应力张量, 简称应力偏张量。

应力球张量表示一种“球形”应力状态。实际上, 在主向空间内, 如令一斜面 n 上的应力矢量为 \mathbf{p} , 其沿 1, 2, 3 轴的分量为

$$p_1 = \sigma_1 l_1$$

$$p_2 = \sigma_2 l_2$$

$$p_3 = \sigma_3 l_3$$

代入式(2-26), 得

$$\frac{p_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{p_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{p_3^2}{\sigma_3^2} = 1 \quad (2-37)$$

上式是一个椭球面方程, 它表示在以 p_1, p_2, p_3 为坐标轴的空间内的主半轴为 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 的一个椭球面, 称为应力椭球面(图 2-13a)。意思是说, 当任一点 O 的每一斜面上的应力都用应力矢量 \mathbf{p} (其分量为 p_1, p_2, p_3) 表示的话, 则任一从点 O 做出的这种矢量的矢端都落在此椭球面上, 如图 2-13a 所示。

^① 布里奇曼(Bridgman, P.W.) 1931 年的试验证明, 对于金属材料, 在大约 2.5 GPa 的静水压力作用下, 才呈现出很小的压缩性。

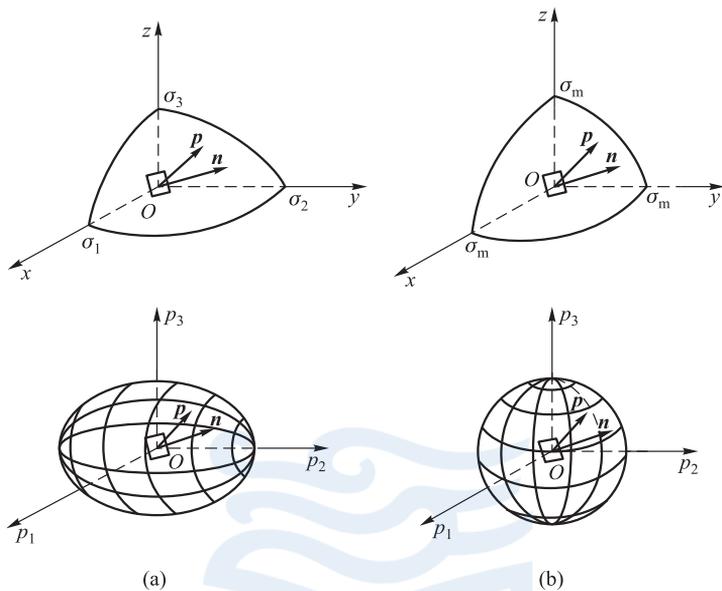


图 2-13

当 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_m$ 时, 式(2-37)可化为

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \sigma_m^2$$

这是一个以 σ_m 为半径, 以坐标原点为球心的球面的方程, 是上述应力椭球面的特殊情况。它表示一个球形应力状态, 如图 2-13b 所示。应力球张量便由此而得名。

应力偏张量则只由偏应力分量 $\sigma_x - \sigma_m = s_1, \sigma_y - \sigma_m = s_2, \sigma_z - \sigma_m = s_3$, 及切应力分量 $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ 构成。以主应力表示的应力偏张量为

$$s_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3} \end{pmatrix}$$

对于应力球张量和应力偏张量 s_{ij} , 可以类似于应力张量 σ_{ij} 那样得到其应力不变量。应力偏张量的 3 个不变量为

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= 0 \\ J_2 &= -\frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \\ &= -\frac{1}{2} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) = s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1 \\ J_3 &= s_1 s_2 s_3 \end{aligned} \right\} \quad (2-38)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \sigma_1 - \sigma_m \\ s_2 &= \sigma_2 - \sigma_m \\ s_3 &= \sigma_3 - \sigma_m \end{aligned} \right\} \quad (2-39)$$

例 2-1 若已给定坐标系如图 2-14 所示, 试列出图中各平面问题的自由边界的应力边界条件。

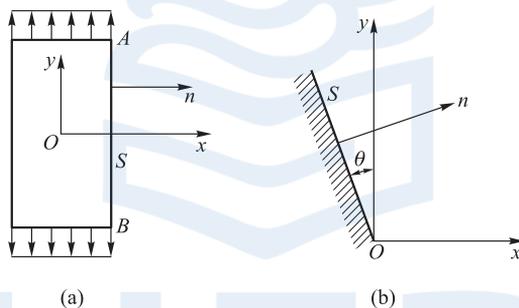


图 2-14

解: 图 2-14a

- 1) 题中给定坐标系 Oxy 。
- 2) 求方向余弦。

已知边界 S 与 x 轴相垂直, 故有

$$l_1 = \cos(n, x) = 1, \quad l_2 = \cos(n, y) = 0$$

- 3) 已知 $\bar{p}_x = \bar{p}_y = 0$ 。

- 4) 代入应力边界条件公式(2-15'), 得

$$\sigma_x = \bar{p}_x = 0, \quad \tau_{xy} = \bar{p}_y = 0$$

即应力边界条件为(在 S 上)

$$\sigma_x = \tau_{xy} = 0$$

图 2-14b

- 1) 题已给定坐标系 Oxy 。

2) 求方向余弦。已知边界 S 与 y 轴成 θ 角, 故有

$$l_1 = \cos(n, x) = \cos \theta$$

$$l_2 = \cos(n, y) = \sin \theta$$

3) S 为自由边界, 故有

$$\bar{p}_x = \bar{p}_y = 0$$

4) 代入式(2-15'), 得

$$0 = \sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta$$

$$0 = \tau_{xy} \cos \theta + \sigma_y \sin \theta$$

得边界条件为

$$\sigma_x = -\tau_{xy} \tan \theta$$

$$\sigma_y = -\tau_{xy} \cot \theta$$

例 2-2 设有图 2-15 所示三角形水坝, 试列出 OA 面(光滑面)的应力边界条件。

解: 此问题可作为平面应变问题考虑。

1) 选取坐标系 Oxy 如图示, 坐标原点在坝顶 O 处。

2) 计算方向余弦, 因 OA 面与 x 轴垂直, 故

$$l_1 = \cos(n, x) = -1$$

$$l_2 = \cos(n, y) = 0$$

3) 求面力分量 p_x, p_y , 设水的密度为 ρ , 则有

$$\bar{p}_x = \rho g y$$

$$\bar{p}_y = 0$$

4) 代入边界条件式(2-15'), 得

$$\bar{p}_x = \sigma_x l_1 + \tau_{xy} l_2 = -\sigma_x = \rho g y$$

$$\bar{p}_y = \tau_{xy} l_1 + \sigma_y l_2 = \tau_{xy} = 0$$

由此得

$$\sigma_x = -\rho g y$$

$$\tau_{xy} = 0$$

例 2-3 设在平面问题条件下, 一点 P 的应力状态为已知, 试求: (1) 主应力及主方向, (2) 最大切应力及其所在的面 θ_p 。

解:

(1) 已知一点的应力状态, 即给定的应力张量

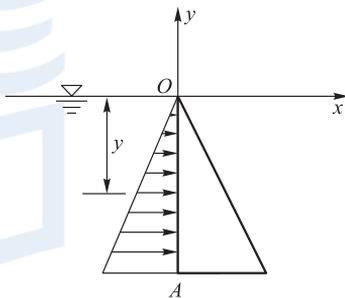


图 2-15

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

设某一平面 C 的法线与 x 轴成 θ 角(图 2-16), 则有

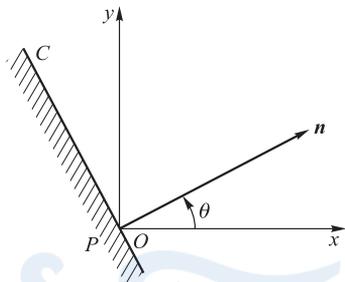


图 2-16

$$l_1 = \cos \theta, \quad l_2 = \sin \theta, \quad l_3 = 0$$

代入式(2-18), 得 C 面上的正应力及切应力分别为

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (\text{a})$$

$$\tau_n = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (\text{b})$$

如 n 方向为主方向, C 面为主平面, 则 $\tau_n = 0$, 由式(b)得到

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (\text{c})$$

由于 $\tan 2\theta = \tan(\pi + 2\theta)$, 所以, n 方向及与之正交的方向是两个主方向。两个主平面的法线与 Ox 轴分别呈 θ 及 $\theta + \frac{\pi}{2}$ 角度, 则

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (\text{d})$$

将由式(d)所得之结果代入式(a), 可得 2 个主应力 σ_1, σ_2 之值, 亦可由代数运算求出主应力的一般公式为

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

(2) 欲求最大或最小切应力所在的面, 可由下列条件求出

$$\frac{d\tau_n}{d\theta} = 0$$

由此得

$$\cot 2\theta_p = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (\text{e})$$

和前一种情况类似, $2\theta_p$ 和 $2\theta_p + \pi$ 同时满足上式, 由此可知最大和最小切应力作用面相互垂直。由式(e)求出 $\cos \theta, \sin \theta$ 后, 代入式(b), 可得

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{\max} \\ \tau_{\min} \end{array} \right\} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

当 $\tau_{xy} = 0$ 时, $\sigma_x = \sigma_1, \sigma_y = \sigma_2$ 为 2 个主应力, 此时最大、最小切应力为

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{\max} \\ \tau_{\min} \end{array} \right\} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)$$

比较式(c)与(e), 可以看出

$$\tan 2\theta = -\cot 2\theta_p = \tan \left(2\theta_p + \frac{\pi}{2} \right)$$

所以, 最大、最小切应力所在的面与主平面成 45° 角。

本章复习要点

1. 应力矢量 σ 的准确定义:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta S} = \sigma$$

2. 一点应力状态的描述, 应力张量 σ_{ij} 完全确定了一点的应力状态, 即

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \sigma_{ii} + s_{ij}$$

3. 三类边界条件:

应力边界条件 $p_i = \sigma_{ij} n_j$ (在 S_σ 上);

位移边界条件 $u_i = \bar{u}_i$ (在 S_u 上);

两种形式的混合边界条件。

4. 三个应力不变量 I_1, I_2, I_3 :

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

5. 应力偏张量的概念及应力偏张量的三个不变量:

$$J_1 = 0$$

$$J_2 = s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1$$

$$J_3 = s_1 s_2 s_3$$

思考题

- 2-1 为什么定义物体内部应力状态的时候要采取在一点的邻域取极限的办法? 是什么物理意义?
- 2-2 满足平衡方程和边界条件的应力是否是实际的应力? 为什么?
- 2-3 切应力互等定理有没有前提条件? 为什么?
- 2-4 应力不变量为什么不变?
- 2-5 平面应力与平面应变的主要异同是什么? 它们都是怎样从实际问题中简化而来的?

习题

2-1 已知一点处的应力状态为

$$\begin{pmatrix} 12 & 6 & 0 \\ 6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times 10^3 \text{ Pa}$$

试求该点处的最大主应力及主方向。

答案: $\sigma_1 = 17.083 \times 10^3 \text{ Pa}$, σ_1 与 x 轴间的夹角为 $40^\circ 16'$ 。

2-2 试用初等理论求出受均布荷载作用的简支梁(矩形截面)的应力状态,并校核所得结果是否满足平衡方程与边界条件。

2-3 试证在坐标变换时, I_1 为一不变量。

2-4 已知下列应力状态

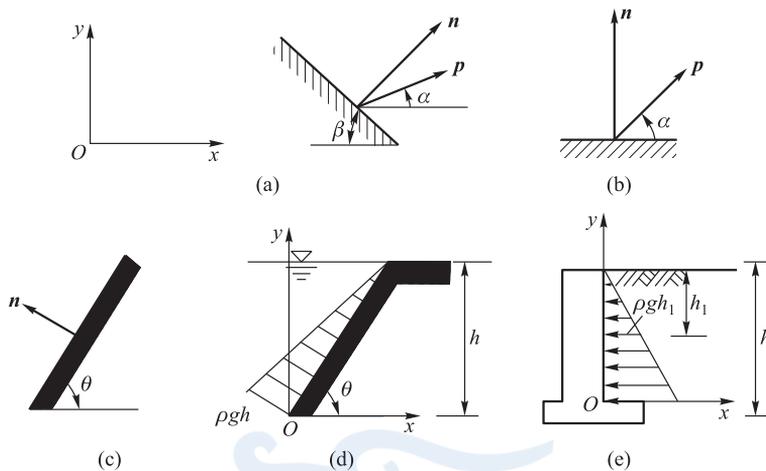
$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 3 & 0 & 3 \\ 8 & 3 & 11 \end{pmatrix} \times 10^5 \text{ Pa}$$

试求八面体正应力与切应力。

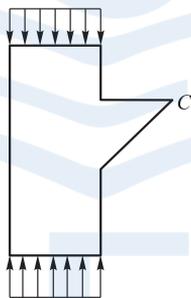
答案: $\sigma_8 = 5.333 \times 10^5 \text{ Pa}$, $\tau_8 = 8.653 \times 10^5 \text{ Pa}$ 。

2-5 试写出下列情况的边界条件(坐标系如图所示)。

2-6 设图中之短柱体处于平面应力状态,试证在牛腿尖端 C 处的应力等于零。



题 2-5 图



题 2-6 图

§ 3-1 变形与应变的概念

前面讨论了受力物体的应力,现在开始讨论受力物体的变形。在外力作用下,物体各点的位置要发生变化,即发生位移。如果物体各点发生位移后仍保持各点间的初始状态的相对位置,那么物体实际上只产生了刚体移动和转动,称这种位移为刚体位移。如果物体各点发生位移后改变了各点间初始状态的相对位置,则物体就同时也产生了形状的变化,统称为该物体产生了变形。

本节主要讨论弹性物体的变形。

设有一弹性体(图 3-1),在外力作用下发生了变形。图中实线轮廓为变形前的状态,虚线为变形后的状态。物体中的点 A 和 B ,变形后的位置为 A' 和 B' 。各点的位移可以用其 x, y, z 方向的位移分量 u, v, w 表示。因而只要确定了物体各点的位移,物体的变形状态就确定了。因为物体各点的位移一般是不同的,故位移分量 u, v, w 应为坐标的函数,即

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z)$$

为了确定物体各点的位移,首先研究物体中任一微小线段的变形状态。以此逐步阐述应变的概念。

设在 Oxy 平面内未变形前物体中相邻的两点 $P_0(x_0, y_0)$ 和 $P(x, y)$ 间的线段为 P_0P , 变形后该线段两端分别移到 $P'_0(x'_0, y'_0)$ 和 $P'(x', y')$ 。如 P_0P 用矢量 \boldsymbol{s} 表示(图 3-2), 变形后为 \boldsymbol{s}' 。 \boldsymbol{s} 沿 x, y 轴的分量为 s_x, s_y 。而 \boldsymbol{s}' 的分量为

$$s'_x = s_x + \delta s_x$$

$$s'_y = s_y + \delta s_y$$

P_0 点的位移分量为

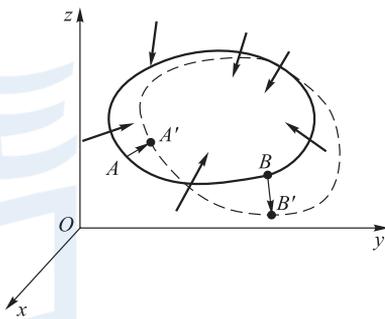


图 3-1

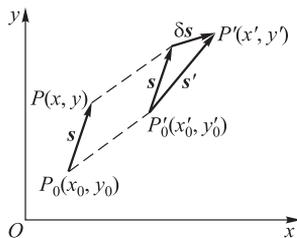


图 3-2

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= x'_0 - x_0 \\ v_0 &= y'_0 - y_0 \end{aligned} \right\} \quad (3-1)$$

P 点的位移分量为

$$\left. \begin{aligned} u &= x' - x \\ v &= y' - y \end{aligned} \right\} \quad (3-2)$$

假定位移 u, v 为 x, y 的单值连续函数, 则可将 P 点的位移对 P_0 点按泰勒级数展开, 即有

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + \frac{\partial u}{\partial x} s_x + \frac{\partial u}{\partial y} s_y + o(s_x^2, s_y^2) \\ v &= v_0 + \frac{\partial v}{\partial x} s_x + \frac{\partial v}{\partial y} s_y + o(s_x^2, s_y^2) \end{aligned} \right\} \quad (3-3)$$

由于 P 就在 P_0 的邻域, s 是个小量, 故 s_x, s_y 的二次项认为是可以略去不计的高阶微量。

将式(3-1)和式(3-2)代入式(3-3), 可得

$$\begin{aligned} u - u_0 &= (x' - x) - (x'_0 - x_0) = \frac{\partial u}{\partial x} s_x + \frac{\partial u}{\partial y} s_y \\ v - v_0 &= (y' - y) - (y'_0 - y_0) = \frac{\partial v}{\partial x} s_x + \frac{\partial v}{\partial y} s_y \end{aligned}$$

而矢量 s, s' 的变化为

$$\begin{aligned} \delta s_x &= s'_x - s_x = (x' - x'_0) - (x - x_0) = (x' - x) - (x'_0 - x_0) \\ \delta s_y &= s'_y - s_y = (y' - y'_0) - (y - y_0) = (y' - y) - (y'_0 - y_0) \end{aligned}$$

于是有

$$\left. \begin{aligned} \delta s_x &= \frac{\partial u}{\partial x} s_x + \frac{\partial u}{\partial y} s_y \\ \delta s_y &= \frac{\partial v}{\partial x} s_x + \frac{\partial v}{\partial y} s_y \end{aligned} \right\} \quad (3-4)$$

或简写为

$$\delta s_i = u_{i,j} s_j \quad (3-4')$$

在二维情况, $i, j = x, y$, 此时 $u_{i,j}$ 为

$$u_{i,j} = \begin{pmatrix} \partial u / \partial x & \partial u / \partial y & 0 \\ \partial v / \partial x & \partial v / \partial y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

在三维情况, $i, j = x, y, z$, 此时 $u_{i,j}$ 为

$$u_{i,j} = \begin{pmatrix} \partial u / \partial x & \partial u / \partial y & \partial u / \partial z \\ \partial v / \partial x & \partial v / \partial y & \partial v / \partial z \\ \partial w / \partial x & \partial w / \partial y & \partial w / \partial z \end{pmatrix}$$

称为相对位移张量。一般地说,它是不对称的。

由图 3-2 明显看出,当 s 移至 s' 时有刚体位移发生,但这种刚体移动并不引起物体的变形,在应变分析中不需要考虑,故应从以上公式中消去表示刚体移动的一部分位移。为此,设想 s 经刚体位移至 s' 的位置。此时,因 s 的长度没有变化,故有

$$s'^2 = s'^2 = (s_x + \delta s_x)^2 + (s_y + \delta s_y)^2 \quad (3-5)$$

展开上式,并略去 δs_i 的高阶微量后,得

$$s'^2 = s^2 + 2(s_x \delta s_x + s_y \delta s_y)$$

由此得

$$s_x \delta s_x + s_y \delta s_y = 0 \quad (3-6)$$

或

$$s_i \delta s_i = 0 \quad (3-6')$$

与式(3-4')比较,有

$$s_i \delta s_i = s_i u_{i,j} s_j = 0$$

或

$$\frac{\partial u}{\partial x} s_x^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) s_x s_y + \frac{\partial v}{\partial y} s_y^2 = 0$$

由 s_x, s_y 的任意性,得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3-7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (3-8)$$

同样地,当在 Oyz 平面和 Oxz 平面讨论时,可得出另外 3 个条件:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

从而当在 $Oxyz$ 空间讨论时,则同时得到以下 6 个条件:

$$u_{i,j} = -u_{j,i}$$

这就是说,对应于刚体移动的相对位移张量,必为反对称张量。

任何一个二阶张量都可以唯一地分解成一个对称张量和一个反对称张量。

因而 $u_{i,j}$ 分解的反对称部分表示刚体位移部分, 对称部分表示纯变形部分。于是, $u_{i,j}$ 可分解为如下两部分:

$$u_{i,j} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \quad (3-9)$$

或

$$u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} \quad (3-9')$$

此处

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3-10)$$

$$\omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3-11)$$

ε_{ij} 即应变张量, ω_{ij} 即转动张量。

对于三维情况, 应变张量为

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3-12)$$

转动张量为

$$\omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{pmatrix} \quad (3-13)$$

这样对于纯变形来说, 方程(3-4)化为

$$\delta s_i = \varepsilon_{ij} s_j \quad (3-14)$$

现在说明应变张量 ε_{ij} 的物理意义。如 s 平行于 x 轴, 则

$$s_x = s, \quad s_y = 0$$

则式(3-14)化为

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_x = \frac{\delta s_x}{s_x} = \frac{\delta s}{s}$$

可见, ε_x 表示原来与 x 轴平行的矢量的单位长度的伸长(或压缩), 称为线应变或正应变。同理可知 ε_y 和 ε_z 的物理意义也是线应变。

如有两个矢量 s_1, s_2 变形前分别平行于 x 轴、 y 轴(图 3-3), i, j 分别为 Ox, Oy 方向的单位矢量, 则

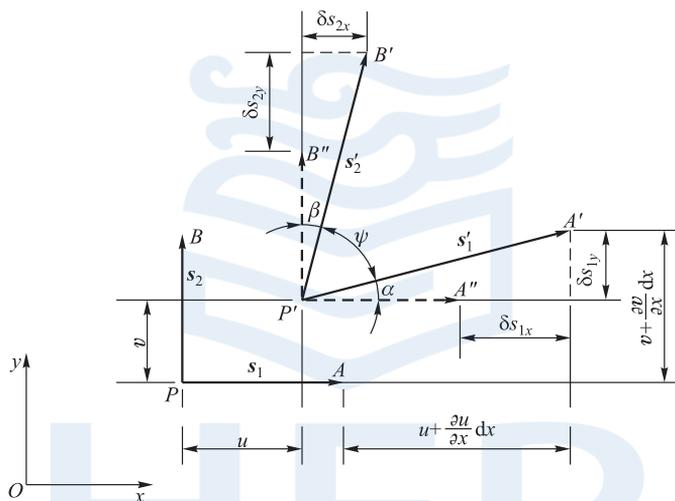


图 3-3

$$s_1 = i s_1, \quad s_2 = j s_2$$

变形后, s_1, s_2 分别变为 s_1', s_2' , 相应地, 点 P, A 和 B 分别移动到 P', A' 和 B' ,

水平矢量 s_1 的转角为 α 。由小变形假设, $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ 均远小于 1, 因此

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{\delta s_{1y}}{s_1 + \delta s_{1x}} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} \approx \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3-15)$$

同理可得垂直矢量 s_2 的转角 β 为

$$\beta \approx \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3-16)$$

如果将变形前后与 Ox 、 Oy 轴正方向一致的相互垂直的两线段在变形过程中发生的夹角改变称为切应变 γ_{xy} , 则

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3-17)$$

注意到式(3-12), 有

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} \quad (3-18)$$

或

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} \quad (3-19)$$

切应变的正负号规定为当两个正向(或负向)坐标轴间的直角减小时为正, 反之则为负。于是, 得到了二维应变情况下的全部(3个)应变分量

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (3-20)$$

对于平面问题, 一点处的应变状态就由这 3 个应变分量完全确定。

三维问题各应变分量为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (3-21)$$

显然, x 轴与 y 轴的角度变化及 y 轴与 x 轴间的角度变化是没有什么不同的, 即有

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz} \quad (3-22)$$

式(3-21)称为应变位移关系式, 也称几何方程。用张量符号可缩写为



[标注 3-1:
三维情况下
应变-位移关
系的几何推导]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (i, j = x, y, z) \quad (3-21')$$

由以上讨论可知,当 $i=j$ 时,得到的是正应变。当 $i \neq j$ 时得到的是切应变。对切应变有

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad (3-23)$$

§ 3-2 主应变与主应变方向

与讨论应力状态时相类似。把切应变等于零的面称为主平面,主平面的法线方向称为主应变方向,主平面上的正应变就是主应变。

设在 ABC 面的法线方向有一矢量 s_n (图 3-4),在变形过程中 s_n 的方向不变,只有长度变化为 δs_n 。因 s_n 与 δs_n 是在一条直线上,故 s_n 与 δs_n 的分量成比例,即

$$\frac{\delta s_n}{s_n} = \frac{\delta s_x}{s_x} = \frac{\delta s_y}{s_y} = \frac{\delta s_z}{s_z} \quad (3-24)$$

其中 s_x, s_y, s_z 及 $\delta s_x, \delta s_y, \delta s_z$ 分别为 s_n 及 δs_n 在 Ox, Oy, Oz 轴上的投影。考虑到

$$\frac{\delta s_n}{s_n} = \varepsilon_n$$

则有

$$\delta s_x = \varepsilon_n s_x, \quad \delta s_y = \varepsilon_n s_y, \quad \delta s_z = \varepsilon_n s_z \quad (3-25)$$

于是,由式(3-14),有

$$\left. \begin{aligned} \delta s_x &= \varepsilon_x s_x + \varepsilon_{xy} s_y + \varepsilon_{xz} s_z \\ \delta s_y &= \varepsilon_{xy} s_x + \varepsilon_y s_y + \varepsilon_{yz} s_z \\ \delta s_z &= \varepsilon_{xz} s_x + \varepsilon_{yz} s_y + \varepsilon_z s_z \end{aligned} \right\} \quad (3-26)$$

将式(3-25)代入式(3-26),得

$$\left. \begin{aligned} (\varepsilon_x - \varepsilon_n) s_x + \varepsilon_{xy} s_y + \varepsilon_{xz} s_z &= 0 \\ \varepsilon_{xy} s_x + (\varepsilon_y - \varepsilon_n) s_y + \varepsilon_{yz} s_z &= 0 \\ \varepsilon_{xz} s_x + \varepsilon_{yz} s_y + (\varepsilon_z - \varepsilon_n) s_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-27)$$

或

$$(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_n) s_j = 0 \quad (3-27')$$

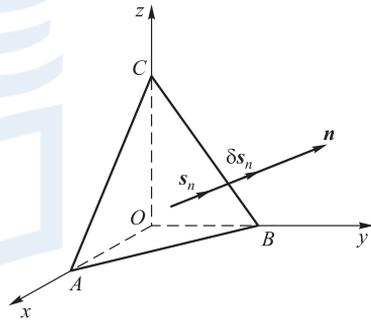


图 3-4

式(3-27)与式(2-25)完全相似,故可得出以 ε_n 为未知量的一个三次方程

$$\varepsilon_n^3 - I'_1 \varepsilon_n^2 + I'_2 \varepsilon_n - I'_3 = 0 \quad (3-28)$$

其中

$$\begin{aligned} I'_1 &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \\ I'_2 &= \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_z - (\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{xz}^2) \\ I'_3 &= \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix} \\ &= \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + 2\varepsilon_{xy} \varepsilon_{yz} \varepsilon_{zx} - (\varepsilon_x \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_y \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_z \varepsilon_{xy}^2) \end{aligned} \quad (3-29)$$

分别称为第一、第二、第三应变不变量。

方程(3-28)有3个实根,即主应变 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, 用与例2-3完全类似的方法可得最大、最小切应变为

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \pm (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \\ \gamma_2 &= \pm (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \\ \gamma_3 &= \pm (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \end{aligned} \right\} \quad (3-30)$$

八面体切应变为

$$\gamma_8 = \frac{2}{3} [(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + 6(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{xz}^2)]^{\frac{1}{2}} \quad (3-31)$$

应变偏张量及其不变量分别为

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(2\varepsilon_3 - \varepsilon_2 - \varepsilon_1) \end{pmatrix} \quad (3-32)$$

及

$$\left. \begin{aligned} J'_1 &= 0 \\ J'_2 &= e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1 \\ J'_3 &= e_1 e_2 e_3 \end{aligned} \right\} \quad (3-33)$$

§ 3-3 应变协调方程

在本课程所讨论的问题范围内,物体变形后必须仍保持其整体性和连续性,即变形的协调性。从数学的观点说,要求位移函数 u, v, w 在其定义域内为单值连续函数。例如把一个矩形物体划分为一些方格(图 3-5a),如对应变不加任何约束,即不要求协调性的话,就可能在变形后出现像图 3-5b 那样的“撕裂”现象,或如图 3-5c 那样的“套叠”现象等。显然,出现了“撕裂”现象后位移函数就出现了间断,出现了“套叠”现象后位移函数就不会是单值的。这些现象破坏了物体的整体性和连续性。因此,为保持物体的整体性,各应变分量之间必须有一定的关系。

另一方面,如给出应变分量,需要求出位移,则应积分几何方程。

以平面问题为例来说,有 3 个这样的方程,但只有 2 个位移分量,如果没有附加条件的话,一般地说是没有单值解的。这就要求应变分量 ε_{ij} 应当满足一定的变形协调条件。

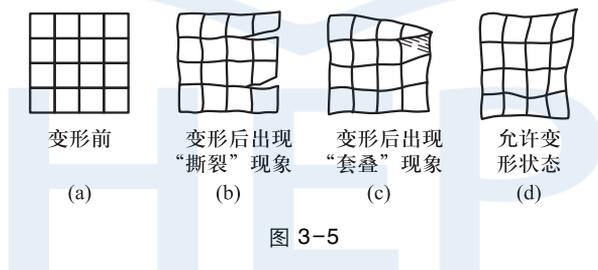


图 3-5

以下导出二维情况的变形协调条件,即应变协调方程。为此,将 ε_x 对 y 的二阶导数与 ε_y 对 x 的二阶导数相加,得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

即

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (3-34)$$

式(3-34)即二维情况下用应变分量表示的应变协调方程,或简称协调方程。应变分量 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 满足协调方程之后,就保证了物体在变形后不会出现撕裂、套叠等现象,保证了位移解的单值和连续性。

类似地,可得三维问题的应变协调方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3-35)$$

当6个应变分量满足以上应变协调方程(3-35)时,就能保证得到单值连续的位移函数^①。

应当指出,应变分量只确定物体中各点间的相对位置,而刚体位移并不包含在应变分量之中。无应变状态下,可以产生任一种刚体移动。如果能正确地求出物体各点的位移函数 u, v, w , 根据应变位移方程求出各应变分量,则应变协调方程即可自然满足,因为应变协调方程本身是从应变位移方程推导出来的。从物理意义上来看:如果位移函数是连续的,变形自然也就可以协调,因而在以后用位移法解题时,应变协调方程可以自然满足;而用力法解题时,则需同时考虑应变协调方程。

^① 关于方程(3-35)是应变分量可积分的充要条件的证明,可参阅有关弹性力学书,例如参考文献[20]。



Cauchy, A.-L. (1789—1857)

柯西 (Cauchy, A.-L.), 1789 年生于法国, 1857 年逝世, 数学家和力学家。他奠定了应力和应变的理论, 首先指出了矩形截面柱体的扭转与圆形截面柱体的扭转有重大区别, 最早研究了板的振动问题, 在数学和力学的其他领域有很多重要贡献。

本章复习要点

1. 相对位移张量可分解为应变张量与转动张量两部分, 即

$$u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$$

2. 正应变与切应变的概念。 ε_x 表示原来与 x 轴平行的矢量的单位长度的伸长 (或压缩)。 $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}$ 表示变形前与 x, y 坐标轴正方向一致的两正交线段在变形后的夹角变化量之半。

3. 应变位移关系式

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (i, j = x, y, z)$$

4. 在二维情况下用应变分量表示的应变协调方程为

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

5. 应变协调方程的重要意义。要理解本章最后一段话的意义, 即如能正确地求出一点的位移函数, 根据应变位移方程求出应变分量, 则应变协调方程自然满足。

思考题

- 3-1 为什么要研究一点邻域的变形或应变状态?
- 3-2 切应变是什么含义? 为什么取这种形式?

3-3 应变协调方程的物理意义是什么? 有什么用途?

3-4 为什么要强调位移的单值连续性?

3-5 应变分析与应力分析有哪些异同之处?

习 题

3-1 已知下列位移, 试求指定点的应变状态。

(1) $u = (3x^2 + 20) \times 10^{-2}$, $v = (4xy) \times 10^{-2}$, 在 $(0, 2)$ 点处;

(2) $u = (6x^2 + 15) \times 10^{-2}$, $v = (8zy) \times 10^{-2}$, $w = (3z^2 - 2xy) \times 10^{-2}$, 在 $(1, 3, 4)$ 点处。

答案: (1) $\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times 10^{-2}$;

(2) $\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & -3 \\ 0 & 32 & 11 \\ -3 & 11 & 24 \end{pmatrix} \times 10^{-2}$ 。

3-2 试证在平面问题中下式成立:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = \varepsilon'_x + \varepsilon'_y$$

3-3 已知应变张量

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} -0.006 & -0.002 & 0 \\ -0.002 & -0.004 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

试求: (1) 主应变; (2) 主应变方向; (3) 八面体切应变; (4) 应变不变量。

答案: (1) $\varepsilon_{1,2} = -2.764 \times 10^{-3}, -7.236 \times 10^{-3}$;

(2) 与 x 轴成 $121^\circ 43'$ 角;

(3) $\gamma_8 = 5.96 \times 10^{-3}$;

(4) $I'_1 = -0.01, I'_2 = -20 \times 10^{-5}, I'_3 = 0$ 。

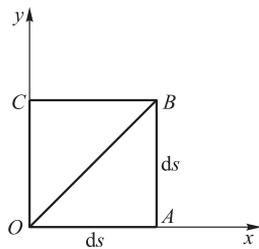
3-4 试说明下列应变状态是否可能:

(1) $\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} C(x^2 + y^2) & Cxy & 0 \\ Cxy & Cy^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} C(x^2 + y^2)z & Cxyz & 0 \\ Cxyz & Cy^2z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3-5 试求下列正方形单元在纯切应变状态时, 切应变 γ_{xy} 与对角线应变 ε_{OB} 之间的关系。

答案: $\varepsilon_{OB} = \frac{1}{2} \gamma_{xy}$ 。



题 3-5 图



第四章

广义胡克定律

§ 4-1 广义胡克定律

在材料力学课程中,已经详细讨论了在单向应力状态下材料处于线性弹性阶段的应力应变关系。如图 4-1 所示,当应力小于屈服应力 σ_0 时,应力 σ_x 与应变 ε_x 之间有下列简单的线性关系:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x$$

其中 E 为弹性模量(杨氏模量),这就是大家所熟知的胡克定律。

在三维应力状态下,描绘一点处的应力状态需要 9 个应力分量,与之相应的应变状态也要用 9 个应变分量来表示。在线弹性阶段应力与应变间有线性关系存在,但在一般情况下任一应变分量要受 9 个应力分量的制约。事实上,由于应力张量与应变张量的对称性,即 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, 9 个应力分量与 9 个应变分量中独立的分量均仅各有 6 个。于是,对于均匀的理想弹性体,上述关系式应有如下形式:

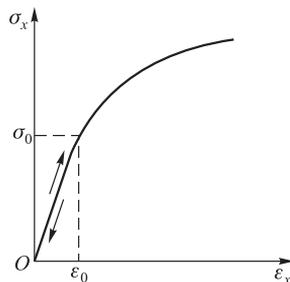


图 4-1

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= c_{11}\varepsilon_x + c_{12}\varepsilon_y + c_{13}\varepsilon_z + c_{14}\gamma_{xy} + c_{15}\gamma_{yz} + c_{16}\gamma_{zx} \\ \sigma_y &= c_{21}\varepsilon_x + c_{22}\varepsilon_y + c_{23}\varepsilon_z + c_{24}\gamma_{xy} + c_{25}\gamma_{yz} + c_{26}\gamma_{zx} \\ \sigma_z &= c_{31}\varepsilon_x + c_{32}\varepsilon_y + c_{33}\varepsilon_z + c_{34}\gamma_{xy} + c_{35}\gamma_{yz} + c_{36}\gamma_{zx} \\ \tau_{xy} &= c_{41}\varepsilon_x + c_{42}\varepsilon_y + c_{43}\varepsilon_z + c_{44}\gamma_{xy} + c_{45}\gamma_{yz} + c_{46}\gamma_{zx} \\ \tau_{yz} &= c_{51}\varepsilon_x + c_{52}\varepsilon_y + c_{53}\varepsilon_z + c_{54}\gamma_{xy} + c_{55}\gamma_{yz} + c_{56}\gamma_{zx} \\ \tau_{zx} &= c_{61}\varepsilon_x + c_{62}\varepsilon_y + c_{63}\varepsilon_z + c_{64}\gamma_{xy} + c_{65}\gamma_{yz} + c_{66}\gamma_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (4-1)$$

其中 c_{mn} ($m, n = 1, 2, \dots, 6$) 为弹性常数。由材料的均匀性可知,常数 c_{mn} 与坐标 x, y, z 无关。

如采用张量表示法,式(4-1)可缩写为

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (4-1')$$

此处 c_{ijkl} 为弹性常数^①。

式(4-1)建立了应力与应变之间的关系,称为广义胡克定律或弹性本构方程^②,在式(4-1)中弹性常数 c_{mn} (或 c_{ijkl}) 共有 36 个。这 36 个常数并不是独立的,以下要证明对于各向同性材料独立的弹性常数只有 2 个。

首先证明,在弹性状态下主应力方向与主应变方向相重合。为此,令 x, y, z 为主应变方向,则切应变分量 $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ 应等于零。于是由式(4-1)有

$$\tau_{xy} = c_{41}\varepsilon_x + c_{42}\varepsilon_y + c_{43}\varepsilon_z \quad (\text{a})$$

现在引进坐标系 $Ox'y'z'$, 原坐标系 $Oxyz$ 绕 y 轴转动 180° 之后可与之重合(图 4-2)。新旧坐标轴间的方向余弦如表 2-1 所示,则有

$$l_{11} = l_{33} = \cos 180^\circ = -1$$

$$l_{22} = \cos 0^\circ = 1$$

$$l_{21} = l_{31} = l_{12} = l_{32} = l_{13} = l_{23} = \cos 90^\circ = 0$$

对于各向同性材料,弹性常数应与方向无关。于是对新坐标系有

$$\tau_{x'y'} = c_{41}\varepsilon_{x'} + c_{42}\varepsilon_{y'} + c_{43}\varepsilon_{z'} \quad (\text{b})$$

由应力分量的坐标变换公式(2-20),得

$$\left. \begin{aligned} \tau_{x'y'} &= l_{11}l_{22}\tau_{xy} = -\tau_{xy} \\ \varepsilon_{x'} &= l_{11}^2\varepsilon_x = \varepsilon_x \\ \varepsilon_{y'} &= l_{22}^2\varepsilon_y = \varepsilon_y \\ \varepsilon_{z'} &= l_{33}^2\varepsilon_z = \varepsilon_z \end{aligned} \right\} \quad (\text{c})$$

由式(b)和(c),可得出

$$-\tau_{xy} = c_{41}\varepsilon_x + c_{42}\varepsilon_y + c_{43}\varepsilon_z \quad (\text{d})$$

比较式(a)和(d)后,得出 $\tau_{xy} = -\tau_{xy}$, 所以,必定有

$$\tau_{xy} = 0$$

同理,可得

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

由此得出对于各向同性弹性体,如 x, y, z 轴为主应变方向,则同时必为主应力方

① 如应力分量与应变分量同以前一样,用 2 个下标符号表示(即 $\sigma_{ij}, \varepsilon_{kl}$),则弹性常数应改用 4 个下标符号 c_{ijkl} 表示。 c_{ijkl} 中的 i, j, k, l , 只取 1, 2, 3, c_{ij} 与 c_{ijkl} 的对应关系为: $c_{11} = c_{1111}, c_{12} = c_{1122}, c_{13} = c_{1133}, c_{14} = c_{1112}, c_{15} = c_{1123}, c_{16} = c_{1131}, c_{21} = c_{2211}, c_{22} = c_{2222}, \dots, c_{26} = c_{2231}, \dots$ 。

② 本构方程有更广的含义,凡介质的应力或应力率。与应变或应变率等之间物理性质的关系式,统称为本构方程(constitutive equation)。

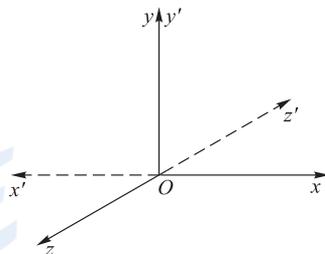


图 4-2

向,即应变主轴与应力主轴重合。



郑玄 (127—200)

郑玄,字康成,山东高密人,东汉大学问家、经学家,他遍注儒家经典,精于天文历算,以毕生精力整理古代文化遗产,对中国文化的流传做出了重要的贡献。他在战国时期成书的《考工记》一书的“弓人篇”的注释中提到:“假令弓力胜三石,引之中三尺,弛其弦,以绳缓擗之,每加物一石,则张一尺。”表达了力与变形成比例的关系,即朴素的弹性定律,早于胡克弹性定律 1 500 年。



Hooke, R. (1635—1703)

胡克(Hooke, R.),英国物理学家,天文学家,曾长期担任英国皇家学会秘书长,他于 1678 年在弹簧试验中以字谜的形式提出了力与变形成比例的弹性定律,称为胡克定律。他用自制的显微镜研究木栓,发现了细胞。

胡克有多项发明,如手表里的平衡轮、反射望远镜等。他在燃烧理论方面也有重要贡献。

§ 4-2 拉梅常量与工程弹性常数

现在考察各向同性材料独立的弹性常数的个数。为此,首先令坐标轴 Ox , Oy , Oz 与主应力方向相一致。于是由式(4-1)可得主应力与主应变之间有下列关系式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= c_{11}\varepsilon_x + c_{12}\varepsilon_y + c_{13}\varepsilon_z \\ \sigma_y &= c_{21}\varepsilon_x + c_{22}\varepsilon_y + c_{23}\varepsilon_z \\ \sigma_z &= c_{31}\varepsilon_x + c_{32}\varepsilon_y + c_{33}\varepsilon_z \end{aligned} \right\} \quad (\text{e})$$

在各向同性介质中, ε_x 对 σ_x 的影响应与 ε_y 对 σ_y 及 ε_z 对 σ_z 的影响都是相同的, 即应有 $c_{11} = c_{22} = c_{33}$ 。同理, ε_y 和 ε_z 对 σ_x 的影响应相同, 即 $c_{12} = c_{13}$, 类似地有 $c_{21} = c_{23}, c_{31} = c_{32}$, 等等, 因而有

$$\left. \begin{aligned} c_{11} = c_{22} = c_{33} = a \\ c_{12} = c_{21} = c_{13} = c_{31} = c_{23} = c_{32} = b \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

由此得出, 对应变主轴(用 1, 2, 3 表示)来说, 弹性常数只有 2 个, a 和 b , 将上式 (f) 代入式 (e), 并令 $a - b = 2\mu, b = \lambda, \theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, 可得下列弹性本构关系:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_1 \\ \sigma_2 &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_2 \\ \sigma_3 &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_3 \end{aligned} \right\} \quad (4-2)$$

常数 λ, μ 称为拉梅(Lamé, G.) 常量。

通过坐标变换后, 可得任意坐标系 $Oxyz$ 内的本构关系为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x, & \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y, & \tau_{yz} &= \mu\gamma_{yz} \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z, & \tau_{xz} &= \mu\gamma_{xz} \end{aligned} \right\} \quad (4-3)$$



[标注 4-1:
从式(4-2)推导
式(4-3)]

或缩写为

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (4-3')$$

以上证明了各向同性的均匀的弹性体的弹性常数只有 2 个。

有些工程材料具有明显的非对称弹性性质。常见的如双向配筋不同的钢筋混凝土构件, 还有木材等。这些材料的弹性性质往往可以认为对于适当选取的坐标系中的平面 $x=0, y=0$ 和 $z=0$ 为对称。由于这三个平面为相互正交, 故称之为正交各向异性材料。

正交各向异性的弹性材料的本构关系, 可根据任一坐标轴反转时弹性常数 c_{ij} 保持不变的要求, 由广义胡克定律式(4-1), 得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= c_{11}\varepsilon_x + c_{12}\varepsilon_y + c_{13}\varepsilon_z \\ \sigma_y &= c_{12}\varepsilon_x + c_{22}\varepsilon_y + c_{23}\varepsilon_z \\ \sigma_z &= c_{13}\varepsilon_x + c_{23}\varepsilon_y + c_{33}\varepsilon_z \\ \tau_{xy} &= c_{44}\gamma_{xy} \\ \tau_{yz} &= c_{55}\gamma_{yz} \\ \tau_{xz} &= c_{66}\gamma_{xz} \end{aligned} \right\} \quad (4-4)$$

其中, 含有 $c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{12}, c_{13}, c_{23}, c_{44}, c_{55}, c_{66}$ 共 9 个弹性常数。具体推导留作练习, 见习题 4-2。

将式(4-3)中的 ε_{ij} 解出后, 可用应力分量 σ_{ij} 表示的应变分量 ε_{ij} 的表达式

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_x - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (\sigma_y + \sigma_z) \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (4-5)$$

稍加变换,并令 $\sigma = \sigma_{ii}$,可缩写为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\lambda \sigma \delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \quad (4-5')$$

现在考虑物体各边平行于坐标轴的这样一种特殊情况。并由此导出工程上常用的弹性常数和广义胡克定律。当物体边界法线方向与 x 轴重合的两对边上有均匀 σ_x 的作用,其他边均为自由边时,则由材料力学知道

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (4-6)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (4-7)$$

此处 E, ν 分别为弹性模量(也称为杨氏模量)与泊松比。应当指出,杨(Young, T.)和泊松(Poisson, S.-D.)先后给出了应力应变间的定量关系,才有了以后弹性力学发展的可能。

比较式(4-5)与式(4-6)、式(4-7),可得

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \\ \nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \end{aligned} \right\} \quad (4-8)$$

工程上常把广义胡克定律用 E 和 ν 表示,在这种情况下,式(4-5)化为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x)], \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \end{aligned} \right\} \quad (4-9)$$

此处

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

为各向同性物体的切变模量。由 G 的表达式可知, G 并不是独立的弹性常数。对于各向同性弹性体,独立的弹性常数只有 2 个,即 λ 和 μ 或 E 和 ν 。将式(4-9)稍加变换后可缩写为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma\delta_{ij} \quad (4-9')$$

其中 $\sigma = \sigma_{ii}$ 。如解出应力 σ_{ij} , 则上式转换为

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ij} + \frac{\nu E\theta\delta_{ij}}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (4-10)$$

如令

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\ \varepsilon_m &= \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \end{aligned} \quad (4-11)$$

则广义胡克定律又可写成

$$\left. \begin{aligned} \sigma_m &= 3K\varepsilon_m \\ s_{ij} &= 2Ge_{ij} \end{aligned} \right\} \textcircled{1} \quad (4-12)$$

其中 s_{ij}, e_{ij} 分别为应力偏张量与应变偏张量, $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ 。

在平面应力的情况下, 由于 $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, 式(4-9)化为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (4-13)$$

如用应变分量表示应力分量, 则由式(4-10), 可得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (4-14)$$

① 由应力偏张量和应变偏张量的定义及式(4-3'), 并注意到 $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu, \mu = G$, 和 $\theta = 3\varepsilon_m$, 再由式(4-12)第一式, 得 $s_{ij} + \sigma_m\delta_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2Ge_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2G(e_{ij} + \varepsilon_m\delta_{ij}) = 2Ge_{ij} + 3\left(\lambda + \frac{2}{3}G\right)\varepsilon_m\delta_{ij}$, 等式两边第二式互相抵消, 于是有 $s_{ij} = 2Ge_{ij}$ 。

对于平面应变问题,由于 $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$,则由式(4-9),可得

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y] \\ \varepsilon_y &= \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x] \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \end{aligned} \right\} \quad (4-15)$$

如解出应力,则有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y] \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu\varepsilon_x + (1-\nu)\varepsilon_y] \\ \sigma_z &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (4-16)$$

比较以上平面应力与平面应变问题的广义胡克定律可知,如将平面应力问题应力应变关系公式(4-13)中的 E 换成 E_1 , ν 换成 ν_1 。而

$$E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}$$

便可得到平面应变问题的应力应变关系的公式(4-15)。

由式(4-12)可以看出,物体的变形可分为两部分:一部分是各向相等的正应力(静水压力)引起的相对体积变形;一部分是应力偏张量作用引起的物体几何形状的变化,并可认为前一种变形不包括物体形状的改变(即畸变)而后一种变形则不包括体积的变化,从而可以将变形分解为两部分。这种分解在塑性理论中很有用处。

以下顺便说明式(4-2)中 θ 的物理意义。如令变形物体中的微小六面体单元的原始体积为 V_0 ,则

$$V_0 = dx dy dz$$

变形后的体积为

$$\begin{aligned} V &= (1+\varepsilon_x)dx \cdot (1+\varepsilon_y)dy \cdot (1+\varepsilon_z)dz \\ &= dx dy dz [(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)+o(\varepsilon^2)] \end{aligned}$$

略去高阶微量,得

$$V = V_0 + V_0\theta$$

此处 $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$, 或

$$\theta = \frac{\Delta V}{V_0}$$

由此可见, θ 为变形前后单位体积的相对体积变化, 或称为体应变。由广义胡克定律, 有

$$\theta = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

由式(4-11)可得,

$$\theta = \frac{3(1 - 2\nu)\sigma_m}{E}$$

或

$$K = \frac{\sigma_m}{\theta} = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (4-17)$$

其中 K 为弹性体积膨胀系数, 称为体积模量。由式(4-11)可得 $\theta = 3\varepsilon_m$, 代入式(4-17), 则得式(4-12)中的第一式。



Young, T. (1773—1829)

杨 (Young, T.), 1773 年生于英国, 1829 年逝世。他是一位多才多艺的学者, 曾以物理学和考古学著称。他给出了应力与应变间的定量数值关系, 从而使得弹性力学正式成为一门科学。



Poisson, S.-D. (1781—1840)

泊松 (Poisson, S.-D.), 1781 年生于法国, 1840 年逝世。他原来学习医学, 后于 1798 年进入巴黎综合工科学学校改学数学, 毕业后任教于母校。著有数学、天文学、电学和力学等方面的著作。其代表性著作《力学教程》于 1811 年问世, 泊松比便是以他的名字命名的。

§ 4-3 弹性应变能函数

弹性体受外力作用后,不可避免地要产生变形,同时外力的势能也要产生变化,当外力缓慢地(不致引起物体产生加速运动)加到物体上时,便可略而不计系统的动能,如同时也略去其他能量(如热能等)的消耗,则外力势能的变化就全部转化为应变能(一种势能)储存于物体的内部。下面给出单位体积应变能的表达式。为此,以 σ_x 作用在微小单元 $ABCD$ 两对边为例来说明(图 4-3)。

由图可知,作用在单元 $ABCD$ 上的外力为 AD 与 CD 边的 σ_x 。而 $\sigma_x dydz$ 在 AD 边移动 du 所做的功为 $-\sigma_x dydzdu$, $\sigma_x dydz$ 在 CB 边移动 $du + d\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)$ 上所做的功为 $\sigma_x dydzd\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right)$ 。所以,外力在 $ABCD$ 变形上所做的功为

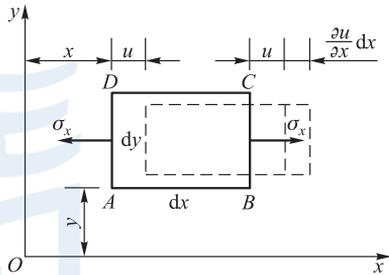


图 4-3

$$dW = \sigma_x d\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx\right) dydz = \sigma_x d\varepsilon_x dx dydz = \sigma_x d\varepsilon_x dV$$

而 y 方向虽有变形,但没有外力作用,所以没有做功。上述 σ_x 所做的功,将全部转化为系统的应变能。如令总应变能为 U_t ①,则应有

$$U_t = W = \int_V \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x d\varepsilon_x dV = \int_V U_0 dV \quad (4-18)$$

此处, U_0 为单位体积的应变能,即

$$U_0 = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x d\varepsilon_x \quad (4-19)$$

对于线弹性材料

$$U_0 = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x \quad (4-19')$$

推广到一般情况

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \quad (4-20)$$

① 《量和单位》中规定势能用 E_p 表示,但本书中应变能采用 U 表示,为弹性力学惯用法,也为了与后面章节中应变能推导过程中的弹性模量 E 相区分。

或简写为

$$U_0 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (4-20')$$

在上式中引入广义胡克定律,可得

$$U_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (4-21)$$

及

$$U_0 = \frac{1}{2} [\lambda e^2 + 2G(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + G(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2)] \quad (4-22)$$

由上式看出, U_0 恒为正。

由式(4-21),式(4-22)可知下式成立:

$$\frac{\partial U_0(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \quad (4-23a)$$

及

$$\frac{\partial U_0(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij} \quad (4-23b)$$

此处 $U_0(\sigma_{ij})$, $U_0(\varepsilon_{ij})$ 分别为用应力分量及应变分量表示的单位体积应变能(应变能密度),统称为应变能函数。对于理想弹性体,则在每一确定的应变状态下,都具有确定的应变能。应变能函数是正定的势函数,所以弹性应变能又称弹性势。上式(4-23)表示,弹性应变能 $U_0(\varepsilon_{ij})$ 对任一应变分量的改变率等于相应的应力分量;而弹性应变能 $U_0(\sigma_{ij})$ 对任一应力分量的改变率就等于相应的应变分量。

前已述及,物体的变形可以分解为两部分,一部分为体积的变化,一部分为形状的变化。因而应变能也应可以分解为相应的两部分。容易理解,引起体积变化的各向同性的平均正应力(称为静水压力)为

$$\sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (4-24)$$

而与之相应的平均正应变为

$$\varepsilon_m = \frac{1}{3} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \quad (4-25)$$

就是说,下列应力状态不引起微小单元体的形状改变

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix}$$

因而,由于体积改变所储存在单位体积内的应变能(简称为体积改变能)为

$$\begin{aligned} U_{0v} &= \frac{3}{2} \sigma_m \varepsilon_m = \frac{\sigma_m^2}{2K} = \frac{1}{18K} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 \\ &= \frac{1}{18K} I_1^2 \end{aligned} \quad (4-26)$$

引起形状改变的应力状态为应力偏张量

$$s_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{pmatrix}$$

令由于形状变化所储存在单位体积内的应变能(简称为畸变能)为

$$U_{0d} = \frac{1}{2} s_{ij} e_{ij}$$

此处 s_{ij} 为应力偏张量, e_{ij} 为应变偏张量。为简便计,给出用主应力表示的 U_{0d} 表达式,即

$$\begin{aligned} U_{0d} &= \frac{1}{2} s_{ij} e_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)^2}{18G} + \frac{(2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1)^2}{18G} + \frac{(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)^2}{18G} \right] \\ &= \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{12G} \\ &= -\frac{1}{2G} J_2 = \frac{3}{4G} \tau_8^2 \end{aligned} \quad (4-27)$$

从而单位体积的应变能可以写成

$$U_0 = U_{0v} + U_{0d} = \frac{1}{18K} I_1^2 - \frac{1}{2G} J_2 \quad (4-28)$$

由上式(4-28)看出,系统的总应变能与坐标的选择无关, U_0 是一个不变量。

本章复习要点

1. 应变主轴与应力主轴相重合是各向同性弹性体的特征。

2. 拉梅常量与工程弹性常数的关系:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

3. 弹性变形能、弹性势的重要概念。

$$U_0 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad U_t = \iiint_V U_0 dV$$

4. 应变能函数 $U_0(\varepsilon_{ij})$ 与 $U_0(\sigma_{ij})$ 的意义。

5. $U_0(\varepsilon_{ij})$ 对任一应变分量的改变率等于相应的应力分量, 即

$$\frac{\partial U_0(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}$$

同样地, 有

$$\frac{\partial U_0(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij}$$

思考题

4-1 广义胡克定律的常数是怎么从 36 个减至 2 个的?

4-2 工程上为什么不常用拉梅常量?

4-3 弹性势是什么意思? 为什么称为势函数? 有什么特点?

4-4 说明畸变能及下式的物理意义:

$$U_{0d} = \frac{1}{2} s_{ij} e_{ij} = -\frac{1}{2G} J_2 = \frac{3}{4G} \tau_8^2$$

4-5 正交各向异性有什么工程背景? 你能举出一些实例吗?

习题

4-1 试证明在弹性应力状态下式 $\gamma_8 = \frac{1}{2G} \tau_8$ 成立。

4-2 试由式(4-1)导出正交各向异性弹性体的广义胡克定律。

提示: 假定材料的弹性性质对三个相互垂直的平面 $x=0, y=0, z=0$ 为对称, 首先令任一坐标轴转动 180° , 考察应力分量及应变分量的正负号变化。由任意两相反方向的弹性性质相同, 可得一些等于零的弹性常数。之后, 再分别转动其他两坐标轴, 又可得一些等于零的常数。

答案: 式(4-4)。

4-3 试证下式成立 $\frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ij}$ 。

第五章

弹性力学边值问题

§ 5-1 基本方程

由前几章的讨论,得出了在三维情况下弹性力学的下列基本方程:

一、平衡方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_{bx} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_{by} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_{bz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-1)$$

或

$$\sigma_{ij,j} + F_{bi} = 0 \quad (5-1')$$

二、几何方程

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (5-2)$$

或

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (i, j = x, y, z) \quad (5-2')$$

以及由应变位移关系导出的应变协调方程

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial x} \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \\
 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\
 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\
 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (5-3)$$

三、本构方程

本构关系为广义胡克定律。

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \\
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}
 \end{aligned} \right\} \quad (5-4)$$

或

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma \delta_{ij} \quad (i, j = x, y, z) \quad (5-4')$$

其中 $\sigma = \sigma_{ii}$ 。如用应变表示应力,则有

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_x &= 2G \left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta \right), \quad \tau_{xy} = G \gamma_{xy} \\
 \sigma_y &= 2G \left(\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta \right), \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz} \\
 \sigma_z &= 2G \left(\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta \right), \quad \tau_{zx} = G \gamma_{zx}
 \end{aligned} \right\} \quad (5-5)$$

或

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{ij} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \theta \delta_{ij} \quad (5-5')$$

其中 $\theta = \varepsilon_{ii}$ 。

总括起来,当物体处于弹性状态时,有 3 个平衡方程(5-1),6 个几何方程(5-2),6 个本构方程(5-4)或(5-5),共 15 个方程(统称为泛定方程)。其中包括 6 个应力分量,6 个应变分量,3 个位移分量,共 15 个未知函数,因而在给定边界条件时,问题是可以求解的。



[标注 5-1:
泛定方程
的定义]

§ 5-2 问题的提法

弹性力学问题的提法必须使定解问题是适定的,即:(1)有解;(2)解是唯一的;(3)解是稳定的。就是说,如定解条件(边界条件和初始条件)有微小变化,只引起解作微小变化。这里只限于讨论前两个问题。

求解弹性力学问题的目的,在于求出物体内部各点的应力和位移,即应力场、位移场。因此,问题的提法是,给定作用在物体全部边界或内部的外界作用(包括温度影响、外力等),求解物体内部由此产生的应力场和位移场。具体地说,对物体内部每一点,当它处在弹性阶段,其应力分量、应变分量、位移分量等 15 个未知函数要满足平衡方程(5-1)、几何方程(5-2)、本构方程(5-4)或(5-5)这 15 个泛定方程,在边界上并要满足给定的全部边界条件。

弹性力学的 15 个基本方程含有 15 个未知数,是一个封闭的方程组。但只有这组方程并不能解决具体问题。在所有满足泛定方程的应力、应变和位移分布的函数中,只有与定解条件(边界条件)相符合的解,才是所需要的解答。因此,边界条件的重要性是不容忽视的。

边界条件分为应力边界条件、位移边界条件和混合边界条件三种。应当强调指出,这些边界条件的个数必须给得不多也不少,才能得出正确的解答。例如,对于空间问题的应力边界,必须在边界的每一点上有 3 个应力边界条件,如果条件给多了,就找不到满足全部条件的解;如果给少了,就会有许多的解满足所给的条件,因而也就无法判断哪些是正确的解。

由此可见,弹性力学的基本方程组一般地控制了物体内部应力、应变和位移之间相互关系的普遍规律,而定解条件具体地给出了每一个边值问题的特定规律。每一个具体的问题反映在各自的边界条件上。于是,弹性力学的基本方程组和边界条件一起构成了弹性力学边值问题的严格完整的提法。

根据具体问题边界条件类型的不同,常把边值问题分为以下三类:

第一类边值问题:给定物体的体力 \bar{X} 和面力 \bar{X}_i ,求在平衡状态下的应力场和位移场,即所谓边界应力已知的问题。

第二类边值问题:给定物体的体力和物体表面各点的位移,求在平衡状态下的应力场和物体内部的位移场,即所谓边界位移已知的问题。

第三类边值问题:在物体表面上一部分给定面力,其余部分给定位移(或在部分表面上给定外力和位移关系)的条件下求解上述问题,即所谓混合边值问题。

在求解以上边值问题时,有三种不同的处理办法,即

(1) 位移法,用位移作为基本未知量来求解边值问题,称位移法。此时将一切未知量和基本方程都转换为用位移表示。通常给定位移边界条件(第二类边值问题)时,宜用位移法。

(2) 应力法,用应力作为基本未知量来求解边值问题,称应力法。此时将一切未知量和基本方程都转换为用应力表示。显然,当给定应力边界条件(第一类边值问题)时,宜用应力法。

(3) 混合法,对第三类边值问题,则宜用以各点的一部分位移分量和一部分应力分量作为基本未知量,混合求解。这种方法称混合法。

以下进一步讨论弹性力学问题的解法。

§ 5-3 弹性力学问题的基本解法 解的唯一性

一、位移法

为了用位移作为基本未知量,必须将泛定方程改用位移 u, v, w 来表示。为此,由方程(5-5)并利用式(5-2),可得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right), \tau_{xy} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \sigma_y &= 2G\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right), \tau_{yz} = G\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \sigma_z &= 2G\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right), \tau_{zx} = G\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \end{aligned} \right\} \quad (5-6)$$

将上式代入平衡方程(5-1)第一式,得

$$\begin{aligned} 2G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\nu}{1-2\nu}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right) + G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right) + \\ G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right) + F_{bx} = 0 \end{aligned}$$

其余类推。注意到

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$$

并采用拉普拉斯(Laplace)算子

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

可得下列用位移表示的微分方程

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + F_{bx} &= 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + F_{by} &= 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + F_{bz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-7)$$

在不计体力时,上式简化为齐次方程

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u &= 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v &= 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-8)$$

或

$$(\lambda + \mu) \mu_{j,ji} + \mu u_{i,jj} = 0 \quad (5-8')$$

上式称为拉梅-纳维(Lamé-Navier)方程。

方程组(5-7)是基本方程的综合(包括平衡方程、几何方程及本构方程),方程组(5-7)含有3个未知函数 u, v, w 。此外,边界条件也要用位移表示,当给定位移边界条件时,问题自然简单。如给定应力边界条件,则需要将边界条件加以变换,改用位移表示。由此,用位移法解弹性力学问题归结为按给定边界条件积分式(5-7)。

二、应力法

为用应力作为基本未知量,需将泛定方程改用应力分量表示,并求出6个应力分量所满足的6个方程。由此所求得的解,应满足应变协调条件和边界条件。为此,应将应变协调方程改用应力表示。如考虑式(5-3)第二式

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (\text{a})$$

将上式中的应变分量用广义胡克定律(5-4)式代入,得

$$(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} \right) - \nu \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} \right) = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (\text{b})$$

其中 $\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = I_1$, 利用平衡方程(5-1), 式(b)等号右边可写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} - F_{bz} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - F_{by} \right) \end{aligned} \quad (\text{c})$$

于是式(b)可写为

$$\begin{aligned} (1 + \nu) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (\sigma_z + \sigma_y) - \nu \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} \right) \\ = - (1 + \nu) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) + \frac{\partial F_{bz}}{\partial z} + \frac{\partial F_{by}}{\partial y} \right] \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} (1 + \nu) \left(\nabla^2 \sigma - \nabla^2 \sigma_x - \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \right) - \nu \left(\nabla^2 \sigma - \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \right) \\ = (1 + \nu) \left(\frac{\partial F_{bx}}{\partial x} - \frac{\partial F_{by}}{\partial y} - \frac{\partial F_{bz}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (\text{d})$$

对于式(5-3)中的第一、三两式, 可得类似于式(d)的2个方程, 将此3式相加, 得

$$\nabla^2 \sigma = -\frac{1 + \nu}{1 - \nu} \left(\frac{\partial F_{bx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{by}}{\partial y} + \frac{\partial F_{bz}}{\partial z} \right) \quad (\text{e})$$

将式(e)代入式(d), 最终得

$$\nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = -\frac{\nu}{1 - \nu} \left(\frac{\partial F_{bx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{by}}{\partial y} + \frac{\partial F_{bz}}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial F_{bx}}{\partial x}$$

类似地可得其他5个方程。于是, 得到应用应力表示的6个协调方程

$$\left. \begin{aligned}
 \nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial F_{bx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{by}}{\partial y} + \frac{\partial F_{bz}}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial F_{bx}}{\partial x} \\
 \nabla^2 \sigma_y + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial F_{bx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{by}}{\partial y} + \frac{\partial F_{bz}}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial F_{by}}{\partial y} \\
 \nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial F_{bx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{by}}{\partial y} + \frac{\partial F_{bz}}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial F_{bz}}{\partial z} \\
 \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} &= - \left(\frac{\partial F_{by}}{\partial x} + \frac{\partial F_{bx}}{\partial y} \right) \\
 \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \partial z} &= - \left(\frac{\partial F_{bz}}{\partial y} + \frac{\partial F_{by}}{\partial z} \right) \\
 \nabla^2 \tau_{zx} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial z} &= - \left(\frac{\partial F_{bx}}{\partial z} + \frac{\partial F_{bz}}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (5-9)$$

上式(5-9)称为贝尔特拉米-米歇尔(Beltrami-Michell)方程。实际上是用应力表示的协调方程,称为应力协调方程。

当体力不计时,式(5-9)简化为

$$\left. \begin{aligned}
 \nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} &= 0 \\
 \nabla^2 \sigma_y + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} &= 0 \\
 \nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} &= 0 \\
 \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} &= 0 \\
 \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \partial z} &= 0 \\
 \nabla^2 \tau_{zx} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial z} &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (5-10)$$

或

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{,ij} = 0 \quad (5-10')$$

由此可知,用应力法解弹性力学问题就归结为求满足平衡方程(5-1)、协调方程(5-9)及边界条件的应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ 的数学问题。注意到,在导出式(5-9)时已经用过3个平衡方程,所以如果在边界上除满足3个力边界条件外,还应满足3个平衡方程(5-1),则在物体内部只须满足6个应力协调

方程(5-9)就能解出 6 个应力分量。

由以上讨论可以看出,对于弹性力学问题需要在严格的边界条件下解复杂的微分方程组。在一般情况下这是一件很不容易的事。因为,往往难以克服数学上的困难。因而人们研究了各种解题方法,如逆解法、半逆解法等。

所谓逆解法,就是选取一组位移或应力的函数,由此求出应变与应力。然后,验证是否满足基本方程。若满足,则求出与这对应的边界上的位移或面力,再与实际边界条件比较。如果相同或可认为相近,就可把所选取的解作为所要求的解。所谓半逆解法又称凑合解法,就是在未知量中先根据问题的特点假设一部分为已知,然后在基本方程和边界条件中,求另一部分。这样就得到了全部未知量。此外,尚有近似解法等。

在研究弹性力学问题的时候,自然会提出问题的解是否存在和是否唯一的问题。回答是肯定的:解是存在的,而且在小变形条件下,对于受一组平衡力系作用的物体,应力和应变的解是唯一的。其位移的解,则含有 6 个表征物体做刚体移动和转动的任意常数。就是说,对于基本方程(5-1),(5-2),(5-4)[或(5-5)],在给定边界条件下,不但有解,而且只有唯一解。解的存在定理证明过程冗长,不拟介绍。以下以应力解为例,对解的唯一性做一些讨论。

设问题的解不唯一, $\sigma_{ij}^{(1)}$ 和 $\sigma_{ij}^{(2)}$ 是同一问题的两组不同的应力解,与之对应的位移为 $u_i^{(1)}$ 和 $u_i^{(2)}$,它们的差为 $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)}$ 及 $u_i^* = u_i^{(1)} - u_i^{(2)}$ 。

因为应力 $\sigma_{ij}^{(1)}$ 和 $\sigma_{ij}^{(2)}$ 都满足平衡方程和协调方程,由于体力是相同的,分别代入平衡方程(5-1)和协调方程(5-9)并对应相减后,得

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}^* &= 0 \\ \nabla^2 \sigma_x^* + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma^*}{\partial x^2} &= 0 \\ \dots\dots\dots \end{aligned}$$

如 $\sigma_{ij}^{(1)}$, $\sigma_{ij}^{(2)}$ 满足同一边界条件

$$\sigma_{ij}^{(1)} n_j = \bar{p}_i, \quad \sigma_{ij}^{(2)} n_j = \bar{p}_i$$

则必有

$$(\sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)}) n_j = 0$$

由此可知,在给定面力的边界上有

$$\sigma_{ij}^* = 0$$

这就是说, σ_{ij}^* 对应于一个无面力、无体力的自然状态。实际上,无面力、无体力作用的自然状态是无应力、无应变的状态。由此得出,在全部体积内有

$$\sigma_{ij}^* = 0$$

或

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)}$$

于是,解的唯一性定理得证。

§ 5-4 圣维南原理

由材料力学知道,两组有相等合力与力矩而分布不同的面力,所求得的应力场只在面力作用点附近才有显著的不同,而离开受力点较远地方的应力分布基本相同。这一事实被圣维南首先发现,总结为圣维南原理。事实上,在边界上往往并不知道应力的精确分布,而只知道某一段边界上的合力和合力矩。因而圣维南原理对解决实际问题是有必要的,实践证明这也是有效的,其数学证明已得到一定程度的进展。

圣维南原理:如作用在弹性体表面某一不大的局部面积上的力系,为作用在同一局部面积上的另一静力等效力系所代替,则荷载的这种重新分布只在离荷载作用处很近的地方才使应力的分布发生显著的变化,在离荷载较远处只有极小的影响。

用钳子夹截一直杆是阐明圣维南原理的一个生动的实例(图 5-1)。

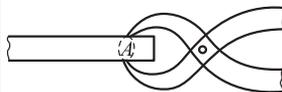


图 5-1

由图可见,杆在 A 处受钳夹紧以后,就等于在该处加了一对平衡力系,无论作用力的大小如何,在夹住部分 A 以外,几乎没有应力产生,甚至杆被钳子截断后,A 处以外仍几乎不受影响。这个例子生动地说明了圣维南原理的真实性。研究证明,影响区的大小,大致与外力作用区的大小相当。



Saint-Venant, A. J. C. B. de
(1797—1886)

圣维南 (Saint-Venant, A. J. C. B. de), 1797 年生于法国, 1886 年逝世。1825 年毕业于巴黎桥梁公路学校后从事工程设计工作, 1837 年回该校任教。1868 年当选为法国科学院院士。在弹性力学方面有很多贡献。他的力作用的局部性思想被称为“圣维南原理”。

§ 5-5 叠加原理

如前所述,弹性力学边值问题的解,必须满足基本方程与边界条件。如采用应力法,则所得应力分量 σ_{ij} 必须满足平衡方程(5-1),协调方程(5-9)和边界条件。设某一弹性体在面力和体力分别为 p_i 和 F_{bi} 作用下的应力分量为 σ_{ij} , 在同一弹性体内由另一组面力 p'_i 和体力 F'_{bi} 所引起的另外一组应力分量为 σ'_{ij} 。则 $\sigma_{ij} + \sigma'_{ij}$ 就一定是由于面力 $p_i + p'_i$ 和体力 $F_{bi} + F'_{bi}$ 的共同作用所引起的应力。这是因为,定解条件和泛定方程都是线性的。在这种情况下

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} + F_{bi} &= 0 \\ \sigma'_{ij,j} + F'_{bi} &= 0\end{aligned}$$

成立,以上两式相加后,有

$$(\sigma_{ij} + \sigma'_{ij})_{,j} + (F_{bi} + F'_{bi}) = 0 \quad (5-11)$$

此外,由于

$$\left. \begin{aligned}\bar{p}_i &= \sigma_{ij} n_j \\ \bar{p}'_i &= \sigma'_{ij} n_j\end{aligned} \right\} \quad (5-12)$$

故在边界上有

$$\bar{p}_i + \bar{p}'_i = (\sigma_{ij} + \sigma'_{ij}) n_j$$

同样,协调方程也可以合并。显然, $(\sigma_{ij} + \sigma'_{ij})$ 满足由 $(\bar{p}_i + \bar{p}'_i)$ 和 $(F_{bi} + F'_{bi})$ 作用下的边值问题。这就是叠加原理。

叠加原理成立的条件为小变形、线性弹性本构方程。对于大变形情况,物体的变形将影响外力的作用,如受纵向和横向外力作用的梁就必须考虑变形的影响。此时叠加原理不再适用。

例 5-1 设有下图所示的柱体,两端受集中力 F 作用,柱体表面为自由表面。试求其应力场与位移场。

解:

1) 确定体力和面力

对于上述问题,首先选取坐标系 $Oxyz$, 如图 5-2 所示。两端处 $z=0, z=l$ 有外力作用,其合力为 F , 假定体力略去不计,柱体侧面的面力等于零。

2) 写出边界条件

在柱体侧面,因任一点的外法线方向 n 均垂直于 z 轴,故 $l_3 = \cos(n, z) = 0$, 柱体侧面的边界条件为

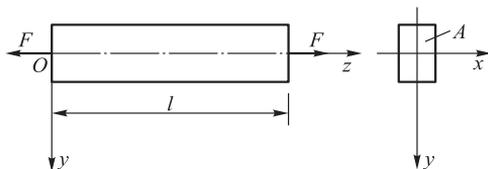


图 5-2

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x l_1 + \tau_{xy} l_2 &= 0 \\ \tau_{xy} l_1 + \sigma_y l_2 &= 0 \\ \tau_{xz} l_1 + \tau_{zy} l_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{a})$$

在两端部, 因 $l_1 = \cos(z, x) = l_2 = \cos(z, y) = 0, l_3 = 1$, 设 σ_z 在端部均匀分布, 则边界条件化为

$$\sigma_z l_3 A = F$$

其中 A 为杆的截面面积, 或

$$\sigma_z A = F$$

3) 选择解题方法

选用应力法求解, 则未知应力应满足式(5-1)和式(5-10), 即

$$\sigma_{ij,j} = 0$$

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1-\nu} \sigma_{,ij} = 0$$

现用逆解法求解。根据解的唯一性知道, 如能给出一个既满足全部方程, 又满足边界条件的解, 则这个解就是本问题的唯一解。

4) 解边值问题

取

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0, \quad \sigma_z = C \quad (\text{b})$$

此处 C 为待定常数, 将式(b)代入式(a), 可见恒满足。

由边界条件, 得出 $\sigma_z = F/A$, 故有

$$C = \frac{F}{A}, \quad \sigma_z = \frac{F}{A}, \quad \sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{F}{A} \quad (\text{c})$$

由广义胡克定律

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{1+\nu}{E} \left(\sigma_z - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_z \right) = \sigma_z \left(\frac{1+\nu}{E} - \frac{\nu}{E} \right) = \frac{F}{EA} \\ \varepsilon_x = \varepsilon_y &= \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{-\nu \sigma_z}{1+\nu} = \frac{-\nu F}{EA} \\ \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{d})$$

由上式可见,各应变分量均为常数。

积分式(5-2),可求出各位移分量。为此,有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x = -\frac{\nu F}{EA}$$

积分后,得在无刚体位移情况下的解为

$$u = -\frac{\nu F}{EA}x$$

同理得

$$v = -\frac{\nu F}{EA}y$$

$$w = \frac{F}{EA}z$$

如给定位移边界条件,则在上面的积分中便包含了积分常数。它反映了杆件的刚体位移。如给定 $x=0$ 处, $u=\bar{u}_0$, 则上述位移解为

$$u = -\frac{\nu F}{EA}x + \bar{u}_0$$

\bar{u}_0 即 x 方向的刚体位移。

5) 校核

将所得结果代入平衡方程、应变协调方程、边界条件等公式,均满足。

在本例题中,各应力分量都是常数,一般问题则要复杂得多。

本章复习要点

1. 弹性力学的基本方程和弹性力学问题的提法是,给定作用在物体全部边界或内部的外界作用,求解物体内部由此而产生的应力场与位移场。

2. 弹性力学边值问题可分三类:①第一类边值问题,宜用应力法求解;②第二类边值问题,宜用位移法求解;③第三类边值问题,宜用混合法求解。

3. 拉梅-纳维方程

$$(\lambda + \mu)u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} = 0$$

包括了平衡方程,几何方程和本构方程。

4. 贝尔特拉米-米歇尔方程实际上是应力协调方程。

5. 圣维南原理与叠加原理。

思考题

5-1 所给边界条件的数目为什么很重要?

5-2 为什么线性弹性力学问题可以用叠加原理? 而其他情况不行?

5-3 逆解法、半逆解法的理论根据什么? 为什么?

5-4 为什么当以应力、应变和位移这 15 个量作未知函数求解时, 则应变协调方程就可以自然满足?

5-5 你还能举出哪些圣维南原理的实例? 如果放弃圣维南原理, 应该考虑怎样处理你举出的实例?

习 题

5-1 试用逆解法求圆截面柱体扭转问题的解。

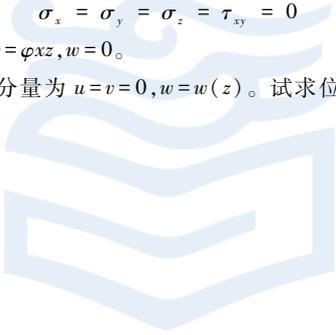
提示: 参考初等理论的解答, 如柱体的轴线为轴, 则假定

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

答案: 位移分量 $u = -\varphi yz, v = \varphi xz, w = 0$ 。

5-2 设一物体内的位移分量为 $u = v = 0, w = w(z)$ 。试求位移函数 $w(z)$ 。

答案: $w = Cz, C$ 为常数。



HEP

§ 6-1 平面问题的基本方程

在第五章中介绍了求解弹性力学问题的两种基本解法,现在讨论平面问题相应的公式,并分别给出平面应力和平面应变两种情况的应力法基本方程和解法示例。

一、平面应力问题

在这种情况下,已知

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0 \quad (6-1)$$

及

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x(x, y) \\ \sigma_y &= \sigma_y(x, y) \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (6-2)$$

平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_{bx} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_{by} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-3)$$

边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_x &= \sigma_x l_1 + \tau_{xy} l_2 \\ \bar{p}_y &= \tau_{xy} l_1 + \sigma_y l_2 \end{aligned} \right\} \quad (6-4)$$

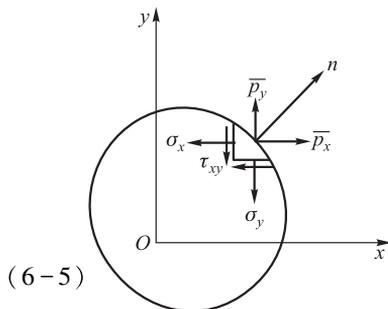
其中 \bar{p}_x, \bar{p}_y 为面力在 x, y 方向的分量(图 6-1)。

$$l_1 = \cos(n, x)$$

$$l_2 = \cos(n, y)$$

本构方程为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \end{aligned} \right\}$$



(6-5)

图 6-1

及

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xz} = \gamma_{yz} &= 0 \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned} \right\} \quad (6-6)$$

此处 ε_z 为薄片在 z 方向的应变分量, 因在平面应力问题的方程中并不包含 ε_z , 它可以从此(6-6)中独立地求出。应变协调方程为

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (6-7)$$

在应力法中, 要把上式改用应力分量表示。为此, 将方程(6-5)代入式(6-7), 并计及式(6-3), 则不难得出

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu) \left(\frac{\partial F_{bx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{by}}{\partial y} \right) \quad (6-8)$$

此即平面应力问题的以应力分量表达的应变协调方程。若不计体力或体力为常数时, 则式(6-8)化为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (6-8')$$

或写成

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

此处 ∇^2 为拉普拉斯算子, 上式称为莱维(Lévy, M.)方程。

二、平面应变问题

在平面应变条件下(图 2-7), 由于长度方向的约束(z 方向的无限延伸, 相当于刚性约束), 则有

$$w = 0$$

由于沿长度方向几何形状不变, 荷载也沿 z 方向不变。故位移 u, v 仅为 x, y 的函数, 而与 z 无关。由此可以沿长度方向任取一个与 Oxy 面平行且厚度等于 1 的薄片作为模型来分析, 而不失代表性。于是有

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (6-9a)$$

及

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (6-9b)$$

将式(6-9b)代入本构方程, 可得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (6-10)$$

及

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{yz} &= 0 \\ \sigma_z &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned} \right\} \quad (6-11)$$

因 σ_z 不包含在基本方程中,故 σ_z 不是独立的未知量,而在求得 σ_x 和 σ_y 后可由式(6-11)单独求解。

由于应力分量只是 x, y 的函数,所以平面应变问题的平衡方程同样为式(6-3),应变协调方程为式(6-7)。当需用应力表示时,则可从平面应力变换到平面应变的对应关系,可将式(6-8)中的 ν 换为 $\frac{\nu}{1-\nu}$ 得出

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial F_{bx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{by}}{\partial y} \right) \quad (6-12)$$

比较式(6-8)与(6-12)可知,式(6-12)与(6-8)只差一个常数系数。此外,在边界上,应力应满足边界条件(6-4)。同样也可得到莱维方程。

从以上的讨论中可以发现,平衡方程、应变协调方程以及边界条件式(6-4)中均不含材料常数。这就是说,不同材料的物体只要它们的几何条件,荷载条件相同,则不论其为平面应力或平面应变问题,它们在平面内的应力分布规律是相同的。这一结论,给模型试验(例如光弹性试验等)提供了理论基础。应当注意,以上两种情况的应力(σ_z)、应变和位移是不相同的。

§ 6-2 应力函数 逆解法与半逆解法

由以上讨论可知,平面问题的弹性解,要求积分平衡方程(6-3)和应变协调方程(6-8)或(6-12),并满足边界条件式(6-4)。在不计体力时,这些方程简化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-13)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (6-13')$$

和边界条件式(6-4)。

一、应力函数

方程(6-13)和(6-13')是用应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 写出的弹性平面问题的基本方程组。如边值问题属于第一类,即面力已知的问题,则可由以上方程组按应力求解,而不需要考虑位移。进一步观察(6-13)和(6-13')两式可以发现,如果引进一个函数 $\varphi_f(x, y)$,使得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial y^2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (6-14)$$

代入平衡方程,可知恒满足。于是有

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial y^2} = \nabla^2 \varphi_f \quad (6-15)$$

由应变协调方程(6-13'),得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial y^2} \right) = 0$$

展开为

$$\frac{\partial^4 \varphi_f}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi_f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi_f}{\partial y^4} = 0 \quad (6-16)$$

或简写为

$$\nabla^4 \varphi_f = 0 \quad (6-16')$$

函数 φ_f 称为应力函数。是由艾里(Airy, G.B.)1862年所引进,故又称为艾里应力函数。方程(6-16)称为双调和方程。由此可知,平面问题的应力分量可用应力函数 φ_f 来表示,而函数 φ_f 应满足双调和方程,也就是说, φ_f 为双调和函数。

现在考虑有体力的情况。假定体力是有势的^①,即

$$F_{bx} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_{by} = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad (a)$$

^① 由理论力学知道,若作用在点 M 的力 F 的投影是坐标的函数,且可用对某一单值函数 $V(x, y, z)$ 取偏微商并冠以负号表示,则该应力场称为是有势的。

其中 V 为势函数。此时,平衡微分方程(6-3)化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x - V) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_y - V) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

比较上式与式(6-13),如令

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y - V &= \frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial x^2} \\ \sigma_x - V &= \frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial y^2} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (6-17)$$

则平衡微分方程可满足,将式(6-17)代入应变协调方程(6-8)及(6-12)后,分别得出:

对于平面应力情况

$$\nabla^4 \varphi_f = -(1-\nu) \nabla^2 V \quad (6-18)$$

对于平面应变情况

$$\nabla^4 \varphi_f = -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \nabla^2 V \quad (6-19)$$

前已述及,直接求解弹性力学问题往往是很困难的。因此,有时不得不采用逆解法或半逆解法等。

二、逆解法与半逆解法

当用逆解法时,要先假定满足双调和方程(6-16)的某种形式的应力函数 φ_f ,然后用式(6-14)求出应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 等,再根据应力边界条件来分析所提应力分量对应于什么样的面力。由此判定所选应力函数 φ_f 可以解什么样的问题。如用半逆解法则针对所要求解的问题,假定部分或全部应力分量为某种形式的双调和函数,留下足够多的待定参数,从而导出应力函数 φ_f 。然后来分析所得应力函数是否满足应变协调方程,判定假定的以及由应力函数导出的应力分量是否满足边界条件,如不满足则应重新假定。

应当指出,由于双调和方程是四阶的,故低于四次的多项式都是双调和函数。但必须至少是二次和二次以上,以保证得出非零的应力解。例如,如取应力函数 φ_f 为下列一次式

$$\varphi_f = C_0 + C_1x + C_2y$$

则双调和方程可以满足,而应力分量

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial y^2} = 0$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial x^2} = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial x \partial y} = 0$$

显然,这是一个无应力状态。由此得出,在应力函数中增添或除去 x 和 y 的一次式,并不影响力分量。

此外,四次或四次以上多项式,则只有 4 个系数是独立的,其余系数应由多项式的双调和条件来确定。

例如,对于下列四次多项式的应力函数

$$\varphi_f(x, y) = C_1x^4 + C_2x^3y + C_3x^2y^2 + C_4xy^3 + C_5y^4$$

有

$$\nabla^4 \varphi_f = 4 \times 3 \times 2 C_1 + 4 \times 2 C_3 + 4 \times 3 \times 2 C_5$$

于是,各系数间应有下列关系式

$$3C_1 + C_3 + 3C_5 = 0$$

即函数 φ_f 在下列条件下为双调和函数

$$C_5 = -\left(\frac{1}{3}C_3 + C_1\right)$$

类似地,对于五次多项式

$$\varphi_f(x, y) = C_1x^5 + C_2x^4y + C_3x^3y^2 + C_4x^2y^3 + C_5xy^4 + C_6y^5$$

有

$$\nabla^4 \varphi_f = 4 \times 3 \times 2 (5C_1 + C_5 + C_3)x + 4 \times 3 \times 2 (5C_6 + C_2 + C_4)y$$

故 φ_f 为双调和函数的条件为

$$5C_1 + C_5 + C_3 = 0$$

$$5C_6 + C_2 + C_4 = 0$$

或

$$C_5 = -(5C_1 + C_3)$$

$$C_6 = -\frac{1}{5}(C_2 + C_4)$$

§ 6-3 梁的弹性平面弯曲

作为用半逆解法在直角坐标系中解题的例子,讨论下述悬臂梁的平面弯曲。设悬臂梁自由端有集中力 F 作用,略去梁的自重,梁的高度为 $2h$,厚度为 δ ,跨度为 l (图 6-2)。

以下首先讨论梁内应力分布。在此情况下,边界条件为

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x)_{x=0} &= 0 \\ (\tau_{xy})_{y=\pm h} &= 0 \\ (\sigma_y)_{y=\pm h} &= 0 \\ F &= - \int_{-h}^{+h} \tau_{xy} \delta dy \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

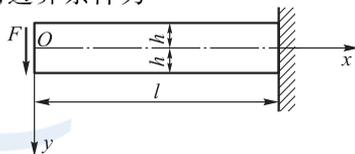


图 6-2

上述边界条件表示:自由端没有轴向水平力,顶部和底部没有荷载作用及自由端的切应力之和应等于 F 。式中第四式的负号是根据第二章对切应力的正负号约定得来的,因为此处切应力是作用在外法线方向与 x 轴反向的平面内,切应力方向与 y 轴同向,故为负。

一、选取应力函数

用半逆解法。由材料力学知道,任一截面的弯矩随 x 作线性变化,而且截面上任一点的正应力 σ_x 与 y 成比例,故可假定 σ_x 为

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = C_1 xy \quad (b)$$

其中 C_1 为一常数。将上式对 y 积分两次,得

$$\varphi_1 = \frac{1}{6} C_1 xy^3 + yf_1(x) + f_2(x) \quad (c)$$

此外 $f_1(x), f_2(x)$ 为 x 的待定函数。将 φ_1 代入双调和方程(6-16),可得

$$y \frac{d^4 f_1}{dx^4} + \frac{d^4 f_2}{dx^4} = 0 \quad (d)$$

由于上式(d)中的第二项与 y 无关,故上式成立时,必有

$$\frac{d^4 f_1}{dx^4} = 0, \quad \frac{d^4 f_2}{dx^4} = 0$$

积分此二式,得

$$f_1(x) = C_2x^3 + C_3x^2 + C_4x + C_5$$

$$f_2(x) = C_6x^3 + C_7x^2 + C_8x + C_9$$

其中 C_1, C_2, \dots, C_9 为积分常数。将上面两函数 $f_1(x), f_2(x)$ 代入式 (c), 得

$$\varphi_f = \frac{1}{6}C_1xy^3 + y(C_2x^3 + C_3x^2 + C_4x + C_5) + (C_6x^3 + C_7x^2 + C_8x + C_9) \quad (6-20)$$

由于应力函数 φ_f 中的一次项和常数项都不出现在应力分量中, 故式 (6-20) 中的 C_5, C_8 和 C_9 可略去。

将式 (6-20) 代入式 (6-14), 可得应力分量 σ_y, τ_{xy} 为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial x^2} = 6(C_2xy + C_6x) + 2(C_3y + C_7) \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2}C_1y^2 - 3C_2x^2 - 2C_3x - C_4 \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

二、系数的确定

根据边界条件 (a) 的第二、三式有

$$(\sigma_y)_{y=\pm h} = 6(\pm C_2h + C_6)x + 2(\pm C_3h + C_7) = 0$$

即

$$6(C_2h + C_6)x + 2(C_3h + C_7) = 0$$

$$6(-C_2h + C_6)x + 2(-C_3h + C_7) = 0$$

上式对所有的 x 都成立, 故有

$$\left. \begin{aligned} C_2h + C_6 &= 0 \\ C_3h + C_7 &= 0 \\ -C_2h + C_6 &= 0 \\ -C_3h + C_7 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

解此方程组, 得

$$C_2 = C_3 = C_6 = C_7 = 0$$

而

$$(\tau_{xy})_{y=\pm h} = -\frac{1}{2}C_1h^2 - 3C_2x^2 - 2C_3x - C_4 = 0$$

故有

$$-\frac{1}{2}C_1h^2 - C_4 = 0$$

即

$$C_4 = -\frac{1}{2}C_1 h^2$$

由方程(a)的第四式,得

$$-\int_{-h}^h \tau_{xy} \delta \, dy = \int_{-h}^h \frac{1}{2} C_1 \delta (y^2 - h^2) \, dy = F$$

由此

$$C_1 = -\frac{3F}{2\delta h^3} = -\frac{F}{I}$$

其中 $I = \frac{2}{3}\delta h^3$ 为截面对中性轴的截面二次矩(惯性矩)。

至此,所有常数均已求出,于是由方程得各应力分量为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Fxy}{I} \\ \sigma_y &= 0 \\ \tau_{xy} &= -\frac{F}{2I}(h^2 - y^2) \end{aligned} \right\} \quad (6-21)$$

由此可见,所得结果与材料力学所得结果完全一致。可得出结论,如端部切应力按抛物线分布, σ_x 在固定端按线性分布,则这一解是精确解。如果不是这样,则根据圣维南原理,这一解在梁内远离端部的截面还是足够精确的,其所影响的区段大约只有截面尺寸那样大小的长度。

三、位移的计算

现在讨论梁的变形。应用应变位移关系及胡克定律,由式(6-21),得出

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{Fxy}{EI} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\nu Fxy}{EI} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \\ &= -\frac{(1+\nu)F}{EI}(h^2 - y^2) = -\frac{F(h^2 - y^2)}{2IG} \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

将上式(f)中的前两式积分,得

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{Fx^2y}{2EI} + u_1(y) \\ v &= \frac{\nu Fxy^2}{2EI} + v_1(x) \end{aligned} \right\} \quad (\text{g})$$

将式(g)中两式分别对 y 和 x 微分,得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{du_1}{dy} - \frac{Fx^2}{2EI} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\nu Fy^2}{2EI} + \frac{dv_1}{dx} \end{aligned}$$

将此结果代入式(f)中第三式,得

$$\frac{du_1}{dy} - \frac{F(2+\nu)}{2EI}y^2 = -\frac{dv_1}{dx} + \frac{F}{2EI}x^2 - \frac{(1+\nu)}{EI}Fh^2$$

上式等号两边分别为 y 和 x 的函数,故各边均等于同一常数 C_1 ,即

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dy} - \frac{F(2+\nu)}{2EI}y^2 &= C_1 \\ \frac{dv_1}{dx} - \frac{F}{2EI}x^2 + \frac{(1+\nu)}{EI}Fh^2 &= -C_1 \end{aligned}$$

积分,得

$$\begin{aligned} u_1(y) &= \frac{F}{6EI}(2+\nu)y^3 + C_1y + C_2 \\ v_1(x) &= \frac{Fx^3}{6EI} - \frac{(1+\nu)Fxh^2}{EI} - C_1x + C_3 \end{aligned}$$

其中 C_2, C_3 为积分常数,将以上两式代入式(g),得位移表达式为

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{Fx^2y}{2EI} + \frac{F}{6EI}(2+\nu)y^3 + C_1y + C_2 \\ v &= \frac{\nu Fxy^2}{2EI} + \frac{Fx^3}{6EI} - \frac{(1+\nu)Fxh^2}{EI} - C_1x + C_3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{h})$$

常数 C_1, C_2, C_3 由阻止梁在 Oxy 面内作刚体运动所必需的 3 个约束条件来确定,如在固定端 ($x=l, y=0$ 处)有

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u = 0, \quad v = 0 \quad (\text{i})$$

代入式(h),求出

$$C_1 = \frac{Fl^2}{2EI}, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = \frac{Fl^3}{3EI} + \frac{Flh^2(1+\nu)}{EI}$$

于是梁的位移为

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{F}{2EI}(l^2 - x^2)y + \frac{(2+\nu)Fy^3}{6EI} \\ v &= \frac{F}{EI} \left[\frac{x^3}{6} + \frac{l^3}{3} + \frac{x}{2}(\nu y^2 - l^2) + h^2(1+\nu)(l-x) \right] \end{aligned} \right\} \quad (6-22)$$

由此得出, u 和 v 都是 x, y 的非线性函数, 就是说, 梁的任一截面变形后不再保持平面, 这一点和材料力学初等理论所得到的结果是不相同的。如在固定端 ($x=l$ 处), 则由式(6-22), 得

$$\begin{aligned} (v)_{x=l} &= \frac{vFl}{2EI}y^2 \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=l} &= \frac{F}{EI} \left[\frac{\nu y^2}{2} - h^2(1+\nu) \right] \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=l, y=0} &= -\frac{Fh^2(1+\nu)}{EI} = -\frac{Fh^2}{2GI} \end{aligned}$$

即由固定端条件得到的固定端的水平线元有一个转角 $Fh^2/2GI$ (图 6-3)。如用另外的条件, 如 $x=l, y=0$ 处, $u=v=0, \partial v/\partial x=0$, 即固定端在 $y=0$ 处水平线元被固定, 则可得类似的结果。

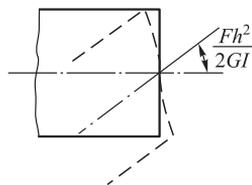


图 6-3

实际上, 固定端的水平线元与竖直线元都不能转动, 端部效应的详细分析是比较复杂的。不过, 由圣维南原理知道, 端部效应的影响范围是不大的(约与梁高相当)。

梁轴的竖向位移为

$$(v)_{y=0} = \frac{Fx^3}{6EI} - \frac{Fl^2x}{2EI} + \frac{Fl^3}{3EI} + \frac{Fh^2(1+\nu)}{EI}(l-x) \quad (6-23)$$

而端部的挠度

$$(v)_{x=y=0} = \frac{Fl^3}{3EI} + \frac{Fh^2(1+\nu)l}{EI} = \frac{Fl^3}{3EI} + \frac{Fh^2l}{2GI}$$

上式等号右边第二项, 显然是剪力对挠度的影响。而这部分与弯曲的影响之比为

$$\frac{Fh^2l/2GI}{Fl^3/3EI} = \frac{3}{2} \frac{h^2E}{l^2G} = \frac{3}{4}(1+\nu) \left(\frac{2h}{l}\right)^2 \approx \left(\frac{2h}{l}\right)^2$$

如 $l=10(2h)$, 则此比值为 $1/100$, 所以当 $2h \ll l$ 时, 梁的挠度主要由于弯曲所引起。由此可见, 在材料力学中所得到的结果, 对于细长梁是足够精确的。

应当指出, 在高而短的梁中, 以及在梁的高频振动和在波的传播问题中, 剪

力效应是非常重要的。

例 6-1 求图 6-4 中受均布荷载作用的简支梁的应力分布与中点位移(不计体力)。

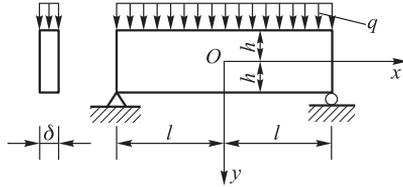


图 6-4

解:

1) 取应力函数

$$\varphi_f = C_1 x^2 + C_2 x^2 y + C_3 y^3 + C_4 \left(x^2 y^3 - \frac{y^5}{5} \right) \quad (\text{a})$$

容易证明 φ_f 满足双调和方程。

2) 由边界条件确定各常数。边界条件为

$$(\tau_{xy})_{y=\pm h} = 0 \quad (\text{b})$$

$$(\sigma_y)_{y=-h} = -q \quad (\text{c})$$

$$(\sigma_y)_{y=h} = 0 \quad (\text{d})$$

在 $x = \pm l$ 处,用圣维南原理,得

$$\delta \int_{-h}^h \sigma_x dy = 0 \quad (\text{e})$$

$$\delta \int_{-h}^h \tau_{xy} dy = \pm ql\delta \quad (\text{f})$$

$$\delta \int_{-h}^h \sigma_x y dy = 0 \quad (\text{g})$$

根据以上条件,得

$$C_2 + 3C_4 h^2 = 0$$

$$2(C_1 + C_2 h + C_4 h^3) = 0$$

$$2(C_1 - C_2 h - C_4 h^3) = -q$$

$$C_3 + C_4 l^2 - \frac{2}{5} C_4 h^2 = 0$$

$$4(C_2 h + C_4 h^3) = q$$

上式分两组求解后,得

$$\varphi_f = q \left[-\frac{x^2}{4} + \frac{3}{8} \frac{x^2 y}{h} + \frac{y^3}{8h^3} \left(l^2 - \frac{2}{5} h^2 \right) - \frac{1}{8h^3} \left(x^2 y^3 - \frac{1}{5} y^5 \right) \right] \quad (\text{h})$$

3) 求应力分量

$$\sigma_x = \frac{q\delta}{2I} \left[(l^2 - x^2)y + 2y \left(\frac{y^2}{3} - \frac{h^2}{5} \right) \right] \quad (\text{i})$$

$$\sigma_y = -\frac{q\delta}{2I} \left(\frac{y^3}{3} - h^2y + \frac{2}{3}h^3 \right) \quad (\text{j})$$

$$\tau_{xy} = -\frac{q\delta}{2I} (h^2 - y^2) x \quad (\text{k})$$

其中 $I = \frac{2}{3}\delta h^3$ 。与材料力学中的结果相比较,在式(h)的等号右边多出了第二项,此项与 x 无关,在 $h=l/10$ 时,此项仅为全部 σ_x 的 $1/1500$ 。由上式看出,在两端面 ($x=\pm l$) 上,有 $\sigma_x = \frac{q\delta y}{I} \left(\frac{y^2}{3} - \frac{h^2}{5} \right)$ 存在,这显然与原题意不符,但在两端面的这些力的合力和合力偶都等于零。于是,根据圣维南原理,除端部附近以外,对全梁来说,此解是准确的。

4) 用所求得之应力,并依本节所述的方法求 $y=0$ 处的位移 v_0 ,为

$$v_0 = \frac{q\delta}{2EI} \left[\frac{x^4}{12} - \frac{l^2 x^2}{2} - \left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2} \right) h^2 x^2 + \frac{5l^4}{12} + \left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2} \right) h^2 l^2 \right]$$

曲率为

$$\frac{d^2 v_0}{dx^2} = -\frac{q\delta}{EI} \left[\frac{l^2 - x^2}{2} + \left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2} \right) h^2 \right]$$

上式方括号中的第二项为材料力学结果的修正项。

四、关于艾里应力函数

通过以上例题和讨论,可以看出用应力函数方法解平面问题借助于逆解法和半逆解法是很方便的。它把解一组微分方程的问题,归结为求解只含 1 个未知函数 φ_f 的四阶偏微分方程,且在无体力的情况下为一个双调和方程,解出 φ_f 后就能求得面内的应力分量,所以是解平面问题常用的方法。我们应该对它有更多的认识。下面指出几点主要特性:^①

(1) 用艾里应力函数法解平面问题只限于力边界或可以化为力边界的混合边界问题。

(2) 体力是有势的情况(或无体力及常体力情况)方可用这种方法。

(3) 艾里应力函数的单值条件是:作用于物体周边上的全部外力构成自平

^① 证明可见有关文献,例如参考文献[14]。

衡力系。

(4) 艾里应力函数可确定到只差一个线性函数的程度。

现在以多项式为例,讨论如何选取应力函数 φ_f :

(1) 取一次多项式 $\varphi_f = a_0 + a_1x + b_1y$,则显然不论系数的取值如何,均能满足式(6-16),且对应于无应力状态。

(2) 取二次多项式 $\varphi_f = a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2$,则同样地不论系数如何,均能满足式(6-16),且对应的应力分量均为常数,这显然是一种均匀应力状态。

(3) 取三次多项式 $\varphi_f = a_3x^3 + b_3x^2y + c_3xy^2 + d_3y^3$,则不论系数如何,式(6-16)仍然能满足,此时,若令部分常数为零,则可以考察每个常数所对应的边界应力状态,这样便可以帮助选取应力函数的形式。

(4) 取四次及四次以上的多项式,就要考虑,欲让式(6-16)得到满足,就要让各系数满足一定的关系式,进一步考察它们所对应的边界应力状态是否是我们所需要的。

上述例子给出了这种考虑问题的方法。此外,艾里应力函数还可以取其他形式,例如以下介绍的三角级数形式和复变函数形式等。

§ 6-4 三角级数形式的弹性平面问题解答 深梁问题

矩形截面梁,在受连续分布荷载作用的情况下,应力函数取多项式的形式来解题是方便的。如果情况比较复杂,特别是荷载不连续时,则应采用三角级数形式的应力函数。现在就以图 6-5 所示的梁为例来讨论弹性平面问题的三角级数解答。现在用逆解法,取应力函数为

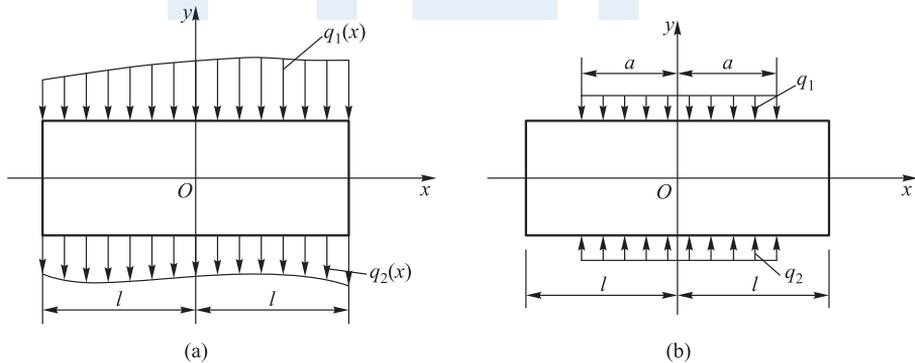


图 6-5

$$\varphi_f = f(y) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (6-24)$$

其中 n 为任意整数, $2l$ 为梁的长度。

若应力函数 φ_f 满足双调和方程

$$\frac{\partial^4 \varphi_f}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi_f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi_f}{\partial y^4} = 0$$

并令 $\alpha = \frac{n\pi}{l}$, 则得下列式(6-25)所示的 $f(y)$ 的常微分方程。实际上有

$$\begin{aligned} \varphi_f &= f(y) \sin \alpha x \\ \frac{\partial^4 \varphi_f}{\partial x^4} &= \alpha^4 f(y) \sin \alpha x \\ \frac{\partial^4 \varphi_f}{\partial x^2 \partial y^2} &= -\alpha^2 f''(y) \sin \alpha x \\ \frac{\partial^4 \varphi_f}{\partial y^4} &= f^{(4)}(y) \sin \alpha x \end{aligned}$$

于是, 得

$$f^{(4)}(y) - 2\alpha^2 f''(y) + \alpha^4 f(y) = 0 \quad (6-25)$$

这一常系数线性微分方程的通解, 可用双曲线函数表示为

$$f(y) = C_1 \operatorname{ch} \alpha y + C_2 \operatorname{sh} \alpha y + C_3 y \operatorname{ch} \alpha y + C_4 y \operatorname{sh} \alpha y \quad (6-26)$$

将此式代入式(6-24), 得应力函数为

$$\varphi_f = (C_1 \operatorname{ch} \alpha y + C_2 \operatorname{sh} \alpha y + C_3 y \operatorname{ch} \alpha y + C_4 y \operatorname{sh} \alpha y) \sin \alpha x \quad (6-27)$$

相应的应力分量为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial y^2} = \sin \alpha x [C_1 \alpha^2 \operatorname{ch} \alpha y + C_2 \alpha^2 \operatorname{sh} \alpha y + C_3 \alpha (2 \operatorname{sh} \alpha y + \\ &\quad \alpha y \operatorname{ch} \alpha y + C_4 \alpha (2 \operatorname{ch} \alpha y + \alpha y \operatorname{sh} \alpha y)] \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial x^2} = -\alpha^2 \sin \alpha x (C_1 \operatorname{ch} \alpha y + C_2 \operatorname{sh} \alpha y + C_3 y \operatorname{ch} \alpha y + \\ &\quad C_4 y \operatorname{sh} \alpha y) \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial x \partial y} = -\alpha \cos \alpha x [C_1 \alpha \operatorname{sh} \alpha y + C_2 \alpha \operatorname{ch} \alpha y + \\ &\quad C_3 (\operatorname{ch} \alpha y + \alpha y \operatorname{sh} \alpha y) + C_4 (\operatorname{sh} \alpha y + \alpha y \operatorname{ch} \alpha y)] \end{aligned} \right\} \quad (6-28)$$

不难证明, 如取应力函数

$$\varphi_f = \cos \alpha x (C_5 \operatorname{sh} \alpha y + C_6 \operatorname{ch} \alpha y + C_7 y \operatorname{sh} \alpha y + C_8 y \operatorname{ch} \alpha y) \quad (6-29)$$

也能满足双调和方程。此外,因 n 为任意整数,因而可得无穷多的特解。这样,应力函数可写为下列无穷级数的形式

$$\begin{aligned} \varphi_f = & \sum_{n=1}^{\infty} \sin \alpha x (C_{1n} \operatorname{sh} \alpha y + C_{2n} \operatorname{ch} \alpha y + C_{3n} y \operatorname{sh} \alpha y + C_{4n} y \operatorname{ch} \alpha y) + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha x (C_{5n} \operatorname{sh} \alpha y + C_{6n} \operatorname{ch} \alpha y + C_{7n} y \operatorname{sh} \alpha y + C_{8n} y \operatorname{ch} \alpha y) \end{aligned} \quad (6-30)$$

上式(6-30)中的系数 $C_{in} (i=1, 2, \dots, 8)$ 应根据边界条件来确定。这时应力边界条件也应展为无穷级数的形式

$$q(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \alpha x + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \alpha x \quad (6-31)$$

由数学分析可知,某一在区域 $[-l, l]$ 上的函数展成傅里叶(Fourier, J.B.J.)级数式(6-31)时,其系数(称为傅里叶系数)为

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} q(x) dx \\ A_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} q(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\ B_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} q(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \end{aligned} \right\} \quad (6-32)$$

对于在梁的上下边界有宽度为 $2a$ 的均布荷载 q_1 作用时(图 6-5b),傅里叶系数

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} q(x) dx = \frac{q_1}{2l} \int_{-a}^{+a} dx = \frac{q_1 a}{l} \\ A_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} q(x) \cos \alpha x dx = \frac{2q_1}{\alpha l} \sin \alpha a \\ B_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} q(x) \sin \alpha x dx = \frac{q_1}{l} \int_{-a}^{+a} \sin \alpha x dx = 0 \end{aligned}$$

这样,对于上边界有

$$q(x) = 2q_1 \left(\frac{a}{2l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha a}{\alpha l} \cos \alpha x \right) \quad (6-33)$$

对于下边界也得同样的表达式。

现在研究有足够多跨的连续墙梁的弹性分析。所谓墙梁是指,高度与跨度相近的一类墙板结构。荷载的作用只在板面以内(图 6-6),墙梁是深梁的一种。

设梁的高度为 h , 跨度为 $2l$, 梁的上边界有均布荷载 q 作用, 忽略边跨效应, 取中间某一跨为代表来讨论, 如图 6-6 所示。

墙梁的支座往往是一系列的柱, 现在将其反力均简化为集中力。在上述情况下为 $2ql$ 。

现在考虑用三角级数形式的应力函数来求解, 步骤如下:

(1) 选取应力函数

因正弦函数项是反对称函数 $[\sin(-x) = -\sin x]$, 而 σ_x, σ_y 应对 y 轴为对称, 故应力函数应取只包含余

弦函数项的级数。此外, 从以后的分析可知, 仅有三角级数尚难满足全部边界条件, 应补充二次多项式, 于是应力函数取下列形式:

$$\varphi_f = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha x (C_{1n} \operatorname{sh} \alpha y + C_{2n} \operatorname{ch} \alpha y + C_{3n} y \operatorname{sh} \alpha y + C_{4n} y \operatorname{ch} \alpha y) + D_1 x^2 + D_2 xy + D_3 y^2 \quad (6-34)$$

此处 $\alpha = n\pi/l, D_i$ 为常数。

应当指出, 由于 $\cos \alpha(x+2l) = \cos \alpha x$, 故所研究的中间任一跨具有代表性, 它和下一跨有相同的条件。

(2) 计算应力分量

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial y^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha x [\alpha^2 (C_{1n} \operatorname{sh} \alpha y + C_{2n} \operatorname{ch} \alpha y + C_{3n} y \operatorname{sh} \alpha y + C_{4n} y \operatorname{ch} \alpha y) + 2\alpha (C_{3n} \operatorname{ch} \alpha y + C_{4n} \operatorname{sh} \alpha y)] + 2D_3 \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial x^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^2 \cos \alpha x (C_{1n} \operatorname{sh} \alpha y + C_{2n} \operatorname{ch} \alpha y + C_{3n} y \operatorname{sh} \alpha y + C_{4n} y \operatorname{ch} \alpha y) + 2D_1 \\ \tau_{xy} &= - \frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial x \partial y} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \sin \alpha x [\alpha (C_{1n} \operatorname{ch} \alpha y + C_{2n} \operatorname{sh} \alpha y + C_{3n} y \operatorname{ch} \alpha y + C_{4n} y \operatorname{sh} \alpha y) + C_{3n} \operatorname{sh} \alpha y + C_{4n} \operatorname{ch} \alpha y] - D_2 \end{aligned} \right\} \quad (6-35)$$

切应力分量 τ_{xy} 应为反对称, 故应有

$$D_2 = 0$$

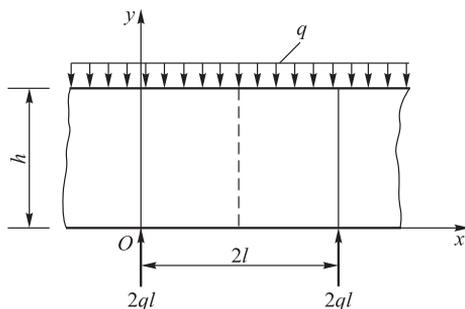


图 6-6

(3) 写出边界条件与平衡条件

- ① 当 $x=0, x=l$ 时, $\tau_{xy}=0$;
- ② $\int_0^l \sigma_y dx = -ql$ (任一水平截面沿 y 方向的平衡方程);
- ③ 当 $y=0$ 时, $\tau_{xy}=0, \sigma_y=0$ (支承处除外);
- ④ 当 $y=h$ 时, $\tau_{xy}=0, \sigma_y=-q$;
- ⑤ 对任意竖向截面有 $\int_0^h \sigma_x dy = 0$ 。

(4) 确定常数, 求应力分布规律

以上共 8 个条件, 不难得到

$$D_1 = -\frac{q}{2}, \quad D_2 = 0, \quad D_3 = 0$$

$$C_{1n} = -\frac{2q}{\alpha^2} \frac{\alpha h + \operatorname{sh} \alpha h \operatorname{ch} \alpha h}{\operatorname{sh}^2 \alpha h} \approx -\frac{2q}{\alpha^2}$$

$$C_{2n} = \frac{2q}{\alpha^2}$$

$$C_{3n} = -\frac{2q}{\alpha} \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha h}{\operatorname{sh}^2 \alpha h - \alpha^2 h^2} \approx -\frac{2q}{\alpha}$$

$$C_{4n} = \frac{2q}{\alpha} \frac{h + \operatorname{sh} \alpha h \operatorname{ch} \alpha h}{\operatorname{sh}^2 \alpha h - \alpha^2 h^2} \approx \frac{2q}{\alpha}$$

将以上常数代入式(6-35), 并注意到

$$\operatorname{ch} \alpha y - \operatorname{sh} \alpha y = e^{-\alpha y}$$

得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -2q \sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha x (1 - \alpha y) e^{-\alpha y} \\ \sigma_y &= -2q \sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha x (1 + \alpha y) e^{-\alpha y} - q \\ \tau_{xy} &= -2q \sum_{n=1}^{\infty} \sin \alpha x (\alpha y) e^{-\alpha y} \end{aligned} \right\} \quad (6-36)$$

各应力分量的分布规律如图 6-7 所示。

(5) 求位移分量

将所得各应力分量的表达式代入下式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x)$$



[标注 6-1:
关于图 6-7
的说明]

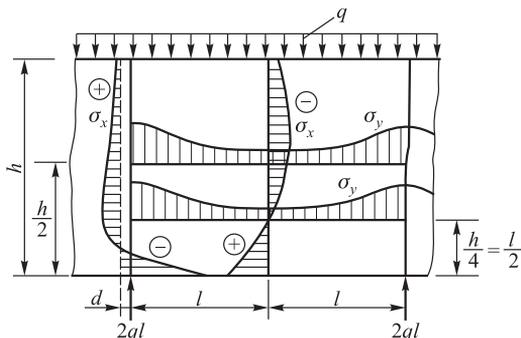


图 6-7

之后积分,可得各位移分量 u 和 v 。

§ 6-5 用极坐标表示的基本方程

在解某些工程问题时,采用极坐标是很方便的。例如厚(薄)壁筒,圆弧形曲梁、圆盘、弹性半无限体边界受集中力作用等问题。以下给出极坐标的有关公式。

极坐标系与直角坐标系之间的关系(图 6-8)为

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (6-37)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho^2 &= x^2 + y^2 \\ \varphi &= \arctan \frac{y}{x} \end{aligned} \right\} \quad (6-38)$$

一、平衡方程

考虑单位厚度的微小单元 $abcd$, 其中在 ρ, φ 方向的体力分量分别为 F_ρ, F_φ , 于是由径向力的平衡(图 6-9), 得

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_\rho + \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} d\rho \right) (\rho + d\rho) d\varphi - \sigma_\rho \rho d\varphi - \left(\sigma_\varphi + \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi \right) d\rho \sin \frac{d\varphi}{2} - \sigma_\varphi d\rho \sin \frac{d\varphi}{2} + \\ & \left(\tau_{\rho\varphi} + \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} d\varphi \right) d\rho \cos \frac{d\varphi}{2} - \tau_{\rho\varphi} d\rho \cos \frac{d\varphi}{2} + F_{\rho\rho} \rho d\rho d\varphi = 0 \end{aligned}$$

由于 $d\varphi$ 是个小量, 故 $\sin \frac{d\varphi}{2}$ 及 $\cos \frac{d\varphi}{2}$ 分别可用 $\frac{d\varphi}{2}$ 和 1 来代替, 略去高次项, 并

以类似的步骤对周向列平衡方程,整理后可得

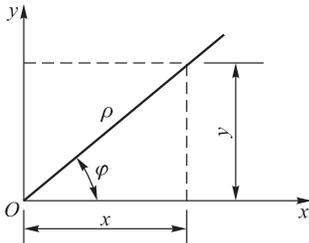


图 6-8

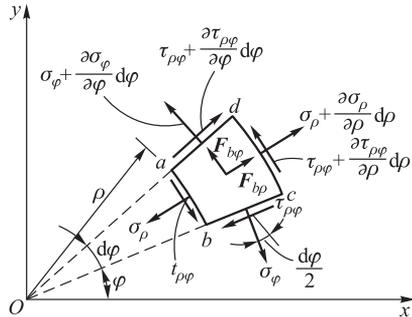


图 6-9

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\varphi}{\rho} + F_{b\rho} &= 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \rho} + \frac{2\tau_{\rho\varphi}}{\rho} + F_{b\varphi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-39)$$

在不计体力时,由极坐标与直角坐标的关系,可导出平衡方程(6-39)用应力函数 $\varphi_f(\rho, \varphi)$ 表示的应力分量 $\sigma_\rho, \sigma_\varphi, \tau_{\rho\varphi}$ 为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi_f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial \varphi^2} \\ \sigma_\varphi &= \frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial \rho^2} \\ \tau_{\rho\varphi} = \tau_{\varphi\rho} &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \varphi_f}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial \rho \partial \varphi} = - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi_f}{\partial \varphi} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6-40)$$

二、应变位移关系

现在考虑微小单元 $ABCD$ 的变形,将 ρ, φ 方向的位移分别记作 u 和 v ,图 6-10 中的微小扇形单元 $ABCD$ 为变形前的状态,虚线 $A'B'C'D'$ 为变形后的状态。各点的位移可以分解为径向与周向两个矢量,例如 AA' ,可分解为 AA'' 和 $A''A'$,余类同。图中 $AB = d\rho, OA'$ 的延长线交 $B''B'$ 于 $F, A'E$

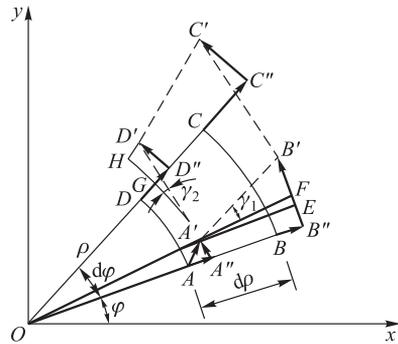


图 6-10

为 $A''B''$ 的平行线。半径为 OA' 的圆弧交 OD'' 于 G , 且交 $C'D'$ 的延长线于 H 。

可见, $\angle HA'F = \pi/2$; A, B, C, D 各点之位移为 $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AA''} + \overrightarrow{A''A'}$, $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BB''} + \overrightarrow{B''B'}$, ...。考虑到 $d\varphi$ 为一小量, 由此可得各应变分量为

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\rho} &= \frac{A'B' - AB}{AB} \approx \frac{BB'' - AA''}{AB} = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial \rho} d\rho - u}{d\rho} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \\ \varepsilon_{\varphi} &= \frac{A'D' - AD}{AD} \approx \frac{D'D'' + GA'' - A'A'' - AD}{AD} \\ &= \frac{v + \frac{\partial v}{\partial \varphi} d\varphi + (\rho + u) d\varphi - v - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{\partial v}{\rho \partial \varphi} + \frac{u}{\rho} \\ \gamma_{\rho\varphi} &= \gamma_1 + \gamma_2 = \angle B'A'F + \angle D'A'H \\ &\approx \frac{B'E - EF}{A''B''} + \frac{D'H}{A'H} \\ &= \frac{B'E}{A''B''} - \frac{A''A'}{OA''} + \frac{DD'' - AA''}{A'H} \\ &= \frac{\frac{\partial v}{\partial \rho} d\rho}{d\rho + \frac{\partial u}{\partial \rho} d\rho} - \frac{v}{\rho + u} + \frac{u + \frac{\partial u}{\partial \varphi} d\varphi - u}{\rho d\varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} d\varphi} \\ &= \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho} + \frac{\partial u}{\rho \partial \varphi}\end{aligned}$$

于是有

$$\varepsilon_{\rho} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \quad (6-41)$$

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{\partial v}{\rho \partial \varphi} + \frac{u}{\rho} \quad (6-42)$$

$$\gamma_{\rho\varphi} = \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho} + \frac{\partial u}{\rho \partial \varphi} \quad (6-43)$$

式(6-41)~式(6-43)即为用极坐标表示的应变位移关系式。

三、胡克定律

用极坐标表示的胡克定律与用直角坐标表示时形式不变, 因局部一点的 ρ, φ 坐标仍是一个直角坐标系。而只须将直角坐标系公式中的 x, y 分别换为 ρ, φ ,



[标注 6-2:
最大切应力
线微分方程
的建立]

于是:

对于平面应力情况为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\rho} &= \frac{1}{E} (\sigma_{\rho} - \nu \sigma_{\varphi}) \\ \varepsilon_{\varphi} &= \frac{1}{E} (\sigma_{\varphi} - \nu \sigma_{\rho}) \\ \gamma_{\rho\varphi} &= \frac{1}{G} \tau_{\rho\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (6-44)$$

对于平面应变情况为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\rho} &= \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_{\rho} - \nu\sigma_{\varphi}] \\ \varepsilon_{\varphi} &= \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_{\varphi} - \nu\sigma_{\rho}] \\ \gamma_{\rho\varphi} &= \frac{1}{G} \tau_{\rho\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (6-45)$$

四、应变协调方程

采用导出直角坐标系应变协调方程的方法,不难导出以极坐标表示的方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{\varphi}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{\rho}}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \varepsilon_{\varphi}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varepsilon_{\rho}}{\partial \rho} \\ = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \gamma_{\rho\varphi}}{\partial \rho \partial \varphi} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \gamma_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (6-46)$$

在轴对称情况(物体和外荷载都有垂直于平面的共同轴线,此时各量均与 φ 无关,故称为轴对称),不计体力时,通过胡克定律,将式(6-46)写成以应力表示的应变协调方程为

$$\nabla^2 (\sigma_{\rho} + \sigma_{\varphi}) = \frac{d^2 (\sigma_{\rho} + \sigma_{\varphi})}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d(\sigma_{\rho} + \sigma_{\varphi})}{d\rho} = 0 \quad (6-47)$$

在用应力函数求解时,应将应变协调方程用应力函数表示,为此,须将 $\frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial x^2}$ 和

$\frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial y^2}$ 改用 ρ, φ 表示。根据式(6-15)可导出拉普拉斯算子为

$$\nabla^2 \varphi_f = \frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial y^2}$$

$$= \frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi_f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial \varphi^2} \quad (6-48)$$

于是,极坐标表示的应变协调方程为

$$\nabla^4 \varphi_f = \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi_f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial \varphi^2} \right) = 0 \quad (6-49)$$

有了以上基本方程,便可按下列步骤求解边值问题:

- (1) 确定体力与面力;
- (2) 写出边界条件;
- (3) 选择解题方法;
- (4) 解方程(满足边界条件);
- (5) 校核(代回基本方程和边界条件)。

§ 6-6 厚壁筒问题

作为用极坐标解弹性力学问题的第一个例子,我们讨论一类最简单的问题,即应力和应变只与一个坐标有关,可以得到封闭形式的解答。本节讨论的受内外压力作用的厚壁筒,属于这类问题。此外还有整球形容器等。

现在研究受内压 p_1 和外压 p_2 作用的厚壁圆筒(图 6-11)。圆筒的内径为 $2a$,外径为 $2b$ 。设圆筒的长度比起圆筒的直径来说足够大,以至可以认为离两端足够远处的应力和应变分布沿筒长方向没有差异。由对称性可知,原来的任一横截面变形后仍保持平面(图 6-11)。因而,应力与应变分布对称于圆筒的中心轴线。如取图 6-11 所示的坐标,则 Oz 为对称轴。每一点的位移将只有 ρ 方向的分量 u 和 z 方向的分量 w ,即 u, w 均与 φ 无关。由于,垂直于 Oz 轴的平面变形后仍为平面,沿圆筒长度一样,故知 u 只依赖于 ρ, w 只依赖

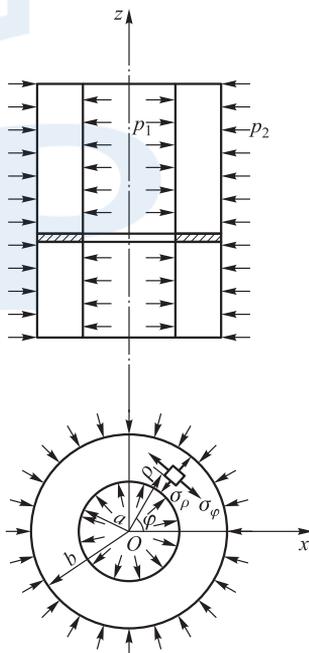


图 6-11

于 z , 于是各应变分量由式 (6-41) ~ (6-43), 得

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\rho} &= \frac{du}{d\rho} \\ \varepsilon_{\varphi} &= \frac{u}{\rho} \\ \gamma_{\rho\varphi} &= \gamma_{\varphi z} = \gamma_{\rho z} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-50)$$

及

$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz}$$

由此, 相对体积变形 e 为

$$e = \varepsilon_{\rho} + \varepsilon_{\varphi} + \varepsilon_z = \frac{du}{d\rho} + \frac{u}{\rho} + \frac{dw}{dz} \quad (6-51)$$

将应变位移关系式代入广义胡克定律, 得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\rho} &= 2G \left(\varepsilon_{\rho} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) \\ &= \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \left(\frac{du}{d\rho} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{u}{\rho} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{dw}{dz} \right) \\ \sigma_{\varphi} &= 2G \left(\varepsilon_{\varphi} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) \\ &= \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \left(\frac{u}{\rho} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{du}{d\rho} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{dw}{dz} \right) \\ \sigma_z &= 2G \left(\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) \\ &= \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \left(\frac{dw}{dz} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{u}{\rho} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{du}{d\rho} \right) \\ \tau_{\rho\varphi} &= \tau_{\varphi z} = \tau_{\rho z} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-52)$$

假定体力略去不计, 则平衡方程 (6-39) 化为

$$\frac{\partial \sigma_{\rho}}{\partial \rho} + \frac{\sigma_{\rho} - \sigma_{\varphi}}{\rho} = 0 \quad (6-53)$$

如对任一微小楔形六面体单元列出 z 方向的平衡条件 (图 6-12), 则由于 $\tau_{\rho z} = \tau_{\varphi z} = 0$, 可得

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (6-54)$$

将式 (6-52) 中的 σ_z 的表达式代入式 (6-54), 得

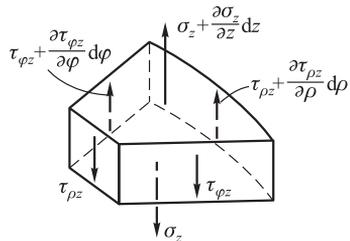


图 6-12

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = 0 \quad (6-55)$$

于是得 $\varepsilon_z = \frac{dw}{dz} = \text{常数}$ (6-56)

将式(6-52)代入式(6-53),化简后可得

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho} - \frac{u}{\rho^2} = 0 \quad (6-57)$$

式(6-57)为欧拉二阶齐次微分方程,其特解为

$$u = \rho^n \quad (6-58)$$

将式(6-58)代入式(6-57),并除以 ρ^{n-2} 后,得特征方程

$$n^2 - 1 = 0 \quad (6-59)$$

方程(6-59)的根为

$$n_1 = 1, \quad n_2 = -1$$

其相应的特解为 ρ 和 $\frac{1}{\rho}$, 而其通解应为这 2 个特解的线性组合, 即

$$u = C_1 \rho + C_2 \frac{1}{\rho} \quad (6-60)$$

将此结果代入式(6-52),得各应力分量为

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{2G}{1-2\nu} (C_1 + \nu\varepsilon_z) - 2GC_2 \frac{1}{\rho^2} = A - B \frac{1}{\rho^2} \\ \sigma_\varphi &= \frac{2G}{1-2\nu} (C_1 + \nu\varepsilon_z) + 2GC_2 \frac{1}{\rho^2} = A + B \frac{1}{\rho^2} \\ \sigma_z &= \frac{4G\nu C_1}{1-2\nu} \varepsilon_z + \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \varepsilon_z \end{aligned}$$

其中 $A = \frac{2G}{1-2\nu} (C_1 + \nu\varepsilon_z)$, $B = 2GC_2$, 均为常数, 应由边界条件来确定。因 σ_z 为一常数, 故所得结果在圆筒两端也是均匀拉力(或压力)时是精确的。

现在考虑自由端的情况。此时, 边界条件为:

$$\begin{aligned} \text{当 } \rho = a \text{ 时, } \sigma_\rho &= -p_1 \\ \text{当 } \rho = b \text{ 时, } \sigma_\rho &= -p_2 \end{aligned} \quad (6-61)$$

用以上条件, 求出之后可得下列弹性解(称为拉梅解答)的公式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\rho} &= \frac{p_1 a^2 - p_2 b^2}{b^2 - a^2} - \frac{(p_1 - p_2) a^2 b^2}{(b^2 - a^2) \rho^2} \\ \sigma_{\varphi} &= \frac{p_1 a^2 - p_2 b^2}{b^2 - a^2} + \frac{(p_1 - p_2) a^2 b^2}{(b^2 - a^2) \rho^2} \\ \tau_{\rho\varphi} &= \tau_{\varphi\rho} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-62)$$

当 $\rho = a$ 时,即在筒内侧,有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\rho} &= -p_1 \\ \sigma_{\varphi} &= \frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} p_1 - \frac{2b^2 p_2}{b^2 - a^2} \end{aligned} \right\} \quad (6-63)$$

当 $\rho = b$ 时,即在筒外侧,有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\rho} &= -p_2 \\ \sigma_{\varphi} &= \frac{2a^2 p_1}{b^2 - a^2} - \frac{(b^2 + a^2) p_2}{b^2 - a^2} \end{aligned} \right\} \quad (6-64)$$

如外侧压力为零,即 $p_2 = 0$,则化为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\rho} &= \frac{p_1 a^2}{b^2 - a^2} - \frac{p_1 a^2 b^2}{(b^2 - a^2) \rho^2} \\ \sigma_{\varphi} &= \frac{p_1 a^2}{b^2 - a^2} + \frac{p_1 a^2 b^2}{(b^2 - a^2) \rho^2} \end{aligned} \right\} \quad (6-65)$$

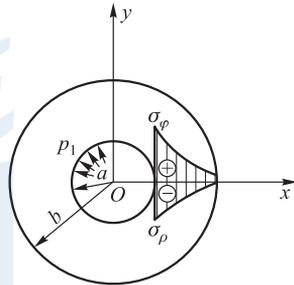


图 6-13

应力分布情况如图 6-13 所示。

最大值发生在内侧 $\rho = a$ 处,其值为

$$[\sigma_{\varphi}]_{\max} = \frac{p(a^2 + b^2)}{b^2 - a^2} \quad (6-66)$$

§ 6-7 半无限平面体问题

当建筑物地基土体作为弹性体考虑时,地表面受带状荷载作用的问题,可化为弹性半平面受垂直荷载作用的问题。此外,大尺寸薄板边界受作用于板的中面并平行于板面的外力作用时也是这类问题。不过前者为平面应变问题;后者为平面应力问题。以下按平面应力的情况来讨论,最后将说明,所得结果对于平面应变情况的应力分量部分仍然适用,位移与应变部分只需更换一下弹性常数。

一、楔形尖顶承受集中荷载

下面首先考虑图 6-14 所示三角形截面的长柱体在顶端受荷载作用时的应力分布。在这里,用应力函数法求解时,遇到的第一个问题是应力函数如何取法。楔形体内的应力一定与 α, φ, ρ, F 有关,这样可由量纲分析知,应力分量的量纲为 $L^{-1}MT^{-2}$, F 的量纲为 MT^{-2} ,故应力分量的表达式的量纲应取为 F/ρ 量纲的形式,因此,由式(6-40)看出应力函数 φ_i 的幂次应比应力分量的幂次高两次。于是,取应力函数为

$$\varphi_i = A\rho\varphi \sin \varphi$$

其中 A 为常数,则由式(6-40),得

$$\sigma_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \varphi^2} = \frac{2A}{\rho} \cos \varphi$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \rho^2} = 0$$

$$\tau_{\rho\varphi} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varphi} \right) = 0$$

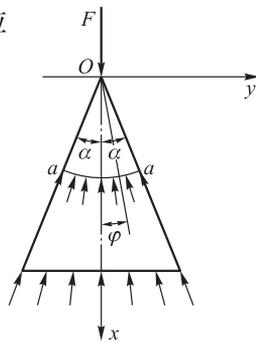


图 6-14

这一应力状态,显然可以满足在楔形体的外缘斜边上无外力作用的边界条件。

现在确定常数 A 。为此,取一半径为 ρ 的弧形面 aa ,其上的分布应力(如图 6-14 所示)的合力应与 F 力相平衡,由此条件,得

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \sigma_\rho \rho \cos \varphi \, d\varphi = F$$

代入 σ_ρ 积分,得

$$2A = -\frac{F}{\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha}$$

及

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho &= -\frac{F}{\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha} \cdot \frac{1}{\rho} \cos \varphi \\ \sigma_\varphi &= \tau_{\rho\varphi} = \tau_{\varphi\rho} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-67)$$

在上式中, $\rho \rightarrow 0$ 时, $\sigma_\rho \rightarrow \infty$ 。这就是说,在荷载 F 的作用点处应力是无穷大,即解答是不适用的。如果外力不是作用在顶点一个点上,而是按式(6-67)的规律,分布在一个小圆弧面积上,则上面的解为该问题的精确解,否则根据圣维南原理除掉在作用点附近的一个小扇形,所得解答仍然是足够精确的。

二、弹性半平面承受集中荷载

在上述问题中,如令 $\alpha = \pi/2$,则得在弹性半平面边界上有集中荷载作用的问题(图 6-15)的解答。这就是本节所要讨论的问题。

将 $\pi/2$ 代入式(6-67),得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\rho} &= -\frac{2F}{\pi} \cdot \frac{\cos \varphi}{\rho} \\ \sigma_{\varphi} &= \tau_{\rho\varphi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-68)$$

下面给出该应力场的特征:

(1) 由式(6-68)知, σ_{ρ} 为主应力,并指向 O 点,其大小随 φ 角的变化而变化。

(2) 在直径为 h ,圆心在 Ox 上且圆弧与 y 轴相切于 O 点的圆上(图 6-15)任一点都有 $\rho/\cos \varphi = h$,所以在此圆周上各点正应力 σ_{ρ} 均为

$$\sigma_{\rho} = -\frac{2F}{\pi h} \quad (6-69)$$

这就是说,除荷载作用点以外,此圆上各点的应力和 σ_{ρ} 相等,即此圆为等径向应力轨迹,通常称为压力泡。又因此圆上 $\tau_{\max} = \sigma_{\rho}/2 = \text{常数}$,故称等色线(因在光弹性试验中等切应力线的颜色相同而得名)(图 6-16a)。

(3) 主应力轨迹为一组同心圆和以 O 为中心的放射线(图 6-16b)。

(4) 最大切应力轨迹为一组与主应力轨迹成 45° 的两组曲线(图 6-16c)。最大切应力轨迹为对数螺线。

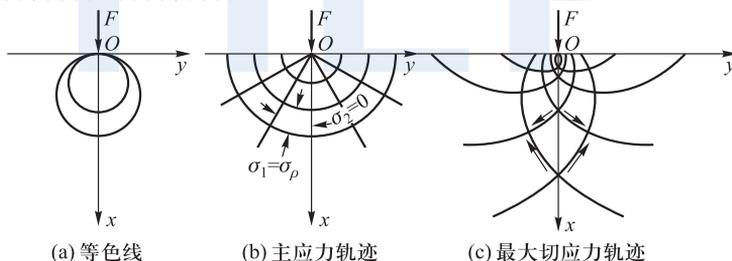


图 6-16



[标注 6-3: 实际上,任一点的最大切应力均与主应力轨迹成 45° ,由此可建立微分方程,用量纲分析法假设应力函数程, $\frac{\rho}{d\rho} = \tan \frac{\pi}{4} = 1$,积分后得 $\rho = ce^{\varphi}$,因而,最大切应力轨迹是一族对数螺线。的过程]

上述用极坐标系表示的各应力分量式(6-68),不难转变到直角坐标系上去。实际上,由图 6-17,得

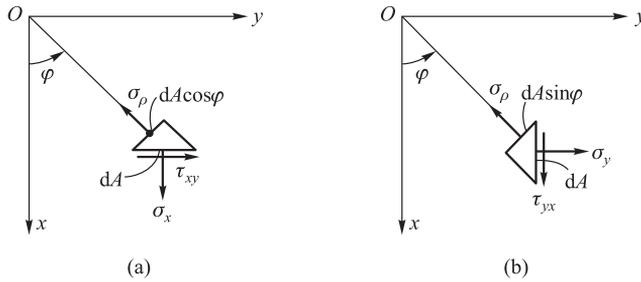


图 6-17

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_\rho \cos^2 \varphi = -\frac{2F \cos^3 \varphi}{\pi \rho} \\ \sigma_y &= \sigma_\rho \sin^2 \varphi = -\frac{2F \sin^2 \varphi \cos \varphi}{\pi \rho} \\ \tau_{xy} &= \sigma_\rho \sin \varphi \cos \varphi = -\frac{2F \sin \varphi \cos^2 \varphi}{\pi \rho} \end{aligned}$$

从而可得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2F}{\pi} \frac{x^3}{(x^2+y^2)^2} \\ \sigma_y &= -\frac{2F}{\pi} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= -\frac{2F}{\pi} \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned} \right\} (6-70)$$

由上式,可得距自由边为 h 的平面上的应力为(图 6-18)

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2F}{\pi} \frac{h^3}{(h^2+y^2)^2} \\ \sigma_y &= -\frac{2F}{\pi} \frac{hy^2}{(h^2+y^2)^2} \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= -\frac{2F}{\pi} \frac{h^2y}{(h^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

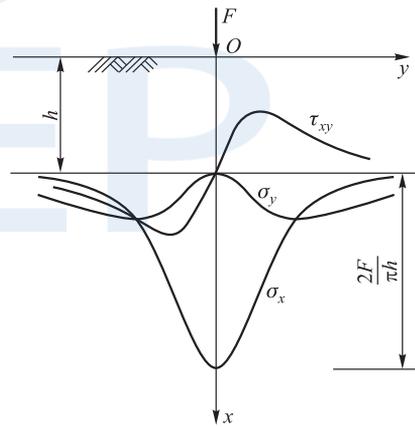


图 6-18

三、位移计算

现在来求位移分量。将广义胡克定律

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\rho &= \frac{1}{E}(\sigma_\rho - \nu\sigma_\varphi) \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{E}(\sigma_\varphi - \nu\sigma_\rho) \\ \gamma_{\rho\varphi} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{\rho\varphi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{a})$$

代入应变位移关系式,得

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\rho &= \frac{\partial u}{\partial \rho} = -\frac{2F \cos \varphi}{\pi E} \frac{1}{\rho} \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{u}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{2\nu F \cos \varphi}{\pi E} \frac{1}{\rho} \\ \gamma_{\rho\varphi} &= \frac{\partial u}{\rho \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{b})$$

将式(b)第一式积分,得

$$u = -\frac{2F}{\pi E} \cos \varphi \ln \rho + f(\varphi) \quad (\text{c})$$

将式(c)代入式(b)第二式,得

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{2\nu F}{\pi E} \cos \varphi + \frac{2F}{\pi E} \cos \varphi \ln \rho - f'(\varphi) \quad (\text{d})$$

积分上式,得

$$v = \frac{2\nu F}{\pi E} \sin \varphi + \frac{2F}{\pi E} \sin \varphi \ln \rho - \int f(\varphi) d\varphi + f_1(\rho) \quad (\text{e})$$

将式(c),(e)代入式(b)第三式,简化并乘以 ρ 后,得

$$\begin{aligned} f_1(\rho) - \rho \frac{df_1(\rho)}{d\rho} &= \frac{df(\varphi)}{d\varphi} + \\ &\int f(\varphi) d\varphi + \frac{2(1-\nu)}{\pi E} \sin \varphi = J = \text{常数} \end{aligned} \quad (\text{f})$$

由此得下列2个方程

$$\left. \begin{aligned} f_1(\rho) - \rho \frac{df_1(\rho)}{d\rho} &= J \\ \frac{df(\varphi)}{d\varphi} + \int f(\varphi) d\varphi + \frac{2(1-\nu)}{\pi E} F \sin \varphi &= J \end{aligned} \right\} \quad (\text{g})$$

解微分积分方程(g),得

$$f_1(\rho) = H\rho + J$$

$$f(\varphi) = I\sin\varphi + K\cos\varphi - \frac{(1-\nu)F}{\pi E}\varphi \sin\varphi$$

其中 J, H, I, K 均为任意常数,考虑到对 x 轴的对称性,有下列边界条件(图 6-19):

(1) 沿 x 轴, ρ 为任意值时均有

$$(v)_{\varphi=0} = 0$$

(2) 在图中 A 点有

$$(u)_{\varphi=0} = 0$$

由此得

$$I = 0, \quad H = 0, \quad J = 0$$

$$K = \frac{2F}{\pi E} \ln h$$

于是得各位移分量为

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{2F}{\pi E} \cos\varphi \ln \frac{h}{\rho} - \frac{(1-\nu)F}{\pi E} \varphi \sin\varphi \\ v &= -\frac{2F}{\pi E} \sin\varphi \ln \frac{h}{\rho} - \frac{(1-\nu)F}{\pi E} \varphi \cos\varphi + \frac{(1+\nu)F}{\pi E} \sin\varphi \end{aligned} \right\} \quad (6-71)$$

由此,自由边界处的位移 v 为

$$(-v)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{2F}{\pi E} \ln \frac{h}{\rho} - \frac{(1+\nu)F}{\pi E}$$

此处 v 以沿 φ 正方向为正。

应当指出,当 $h \rightarrow \infty$ 时,由上式(6-71),得 $(v)_{\varphi=\pi/2} \rightarrow \infty$,这显然是与实际不符的。为了实际应用的目的(例如在土力学中求地基的沉降),可以取自由边界上的一点作为基点(例如图 6-20 中的 B 点),求任意点 M 对该点的相对位移 η

$$\eta = \left[\frac{2F}{\pi E} \ln \frac{h}{\rho} - \frac{(1+\nu)F}{\pi E} \right] - \left[\frac{2F}{\pi E} \ln \frac{h}{s} - \frac{(1+\nu)F}{\pi E} \right]$$

$$\eta = \frac{2F}{\pi E} \ln \frac{s}{\rho} \quad (6-72)$$

前面曾提到,对于平面应变问题,以上所得结果仍然适用,只须将位移分量公式

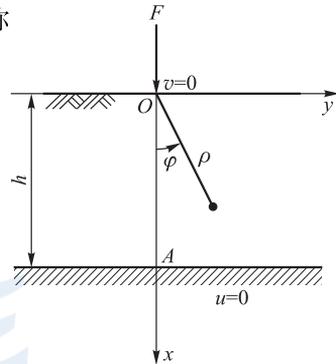


图 6-19

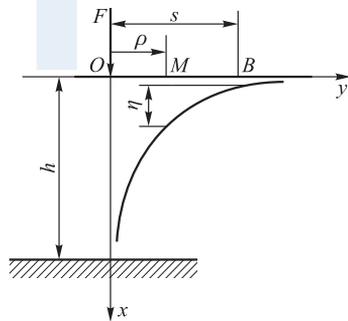


图 6-20

中的 E 换为 $\frac{E}{1-\nu^2}$, ν 应换为 $\frac{1}{1-\nu}$ 。例如,在平面应变情况下式(6-72)应改写为

$$\eta = \frac{2(1-\nu^2)F}{\pi E} \ln \frac{s}{\rho} \quad (6-73)$$

以上结果不难用叠加原理推广到自由边有多个集中力及分布荷载作用的情况。

§ 6-8 坝体应力

现在讨论图 6-21 所示的三角形坝体在一侧受水压作用、一侧自由且下端固定的坝内应力场问题。为方便起见,采用极坐标系 $O\rho\varphi$, 而 Oxy 坐标系如图示情况,即 x 轴与迎水面相重合。

为求坝内任一点 M 处的应力,根据量纲分析取应力函数为

$$\varphi_r = \rho^3 (a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi + a_3 \cos 3\varphi + b_3 \sin 3\varphi) \quad (6-74)$$

不难推出,上式应力函数满足双调和方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial \rho^2} + \frac{\partial}{\rho \partial \rho} + \frac{\partial^2}{\rho^2 \partial \varphi^2} \right)^2 \varphi_r = 0 \quad (6-75)$$

设坝体材料密度为 ρ_2 , 则其体力分量为

$$\left. \begin{aligned} F_{b\rho} &= \rho_2 g \cos(\varphi - \alpha) \\ F_{b\varphi} &= -\rho_2 g \sin(\varphi - \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (6-76)$$

平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\varphi}{\rho} + F_{b\rho} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2\tau_{\rho\varphi}}{\rho} + F_{b\varphi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-77)$$

非齐次微分方程(6-77)的通解等于它所对应的齐次方程的通解,与原方程的特解相叠加。

方程(6-77)之通解为

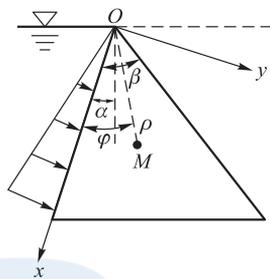


图 6-21



[标注 6-4:
欧拉方程的
特征根为二
重实根时通
解中对应项
的表示方法]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\rho}^* &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi_f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial \varphi^2} \\ \sigma_{\varphi}^* &= \frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial \rho^2} \\ \tau_{\rho\varphi}^* &= -\frac{\partial \varphi_f}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi_f}{\partial \varphi} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6-78)$$

而另一个特解可利用观察方法求得,即为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\rho}^{**} &= \sigma_{\varphi}^{**} = -\rho_2 g \rho \cos(\varphi - \alpha) \\ \tau_{\rho\varphi}^{**} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-79)$$

故坝体内任一点 M 处的应力为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\rho} &= \sigma_{\rho}^* + \sigma_{\rho}^{**} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi_f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial \varphi^2} - \rho_2 g \rho \cos(\varphi - \alpha) \\ \sigma_{\varphi} &= \sigma_{\varphi}^* + \sigma_{\varphi}^{**} = \frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial \rho^2} - \rho_2 g \rho \cos(\varphi - \alpha) \\ \tau_{\rho\varphi} &= \tau_{\rho\varphi}^* + \tau_{\rho\varphi}^{**} = -\frac{\partial \varphi_f}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi_f}{\partial \varphi} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6-80)$$

将式(6-74)代入上式(6-80),可得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\rho} &= 2\rho(a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi - 3a_3 \cos 3\varphi - 3b_3 \sin 3\varphi) - \rho_2 g \rho \cos(\varphi - \alpha) \\ \sigma_{\varphi} &= 6\rho(a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi - a_3 \cos 3\varphi - b_3 \sin 3\varphi) - \rho_2 g \rho \cos(\varphi - \alpha) \\ \tau_{\rho\varphi} &= 2\rho(a_1 \sin \varphi - b_1 \cos \varphi + 3a_3 \sin 3\varphi - 3b_3 \cos 3\varphi) \end{aligned} \right\} \quad (6-81)$$

考虑到应力边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\varphi} \Big|_{\varphi=0} &= -\rho_1 g \rho \cos \alpha \\ \tau_{\rho\varphi} \Big|_{\varphi=0} &= 0 \\ \sigma_{\varphi} \Big|_{\varphi=\beta} &= 0 \\ \tau_{\rho\varphi} \Big|_{\varphi=\beta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-82)$$

其中 ρ_1 为液体密度。

由式(6-81)和式(6-82),可得关于 a_1, b_1, a_3, b_3 的方程组

$$\left. \begin{aligned} a_1 + a_3 &= \frac{\rho_2 g - \rho_1 g}{6} \cos \alpha \\ b_1 + 3b_3 &= 0 \\ a_1 \cos \beta + b_1 \sin \beta + a_3 \cos 3\beta + b_3 \sin 3\beta &= \frac{\rho_2 g}{6} \cos(\beta - \alpha) \\ a_1 \sin \beta - b_1 \cos \beta + 3a_3 \sin 3\beta - 3b_3 \cos 3\beta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-83)$$

解上式(6-83), 即得

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{3}{2(3+\cos 2\beta-4\cos 4\beta)} \left\{ \frac{\cos \beta - \cos 3\beta}{6} \cdot \right. \\
 &\quad \left. [\rho_2 g \cos(\beta-\alpha) - (\rho_2 g - \rho_1 g) \cos \alpha \cos 3\beta] - \right. \\
 &\quad \left. \frac{\rho_2 - \rho_1}{2} g \left(\sin \beta - \frac{1}{3} \sin 3\beta \right) \sin 3\beta \cos \alpha \right\} \\
 b_1 &= \frac{\rho_2 - \rho_1}{2} g \frac{\sin 3\beta \cos \alpha}{\cos 3\beta - \cos \beta} - \\
 &\quad \frac{3(\sin \beta - \sin 3\beta)}{2(3+\cos 2\beta-4\cos 4\beta)(\cos 3\beta - \cos \beta)} \cdot \\
 &\quad \left\{ \frac{\cos \beta - \cos 3\beta}{6} [\rho_2 g \cos(\beta-\alpha) \right. \\
 &\quad \left. - (\rho_2 - \rho_1) g \cos \alpha \cos 3\beta] - \right. \\
 &\quad \left. \frac{\rho_1 - \rho_2}{2} g \left(\sin \beta - \frac{1}{3} \sin 3\beta \right) \sin 3\beta \cos \alpha \right\} \\
 a_3 &= \frac{\rho_2 - \rho_1}{6} g \cos \alpha \frac{3}{2(3+\cos 2\beta-4\cos 4\beta)} \cdot \\
 &\quad \left\{ \frac{\cos \beta - \cos 3\beta}{6} [\rho_2 g \cos(\beta-\alpha) - \right. \\
 &\quad \left. (\rho_2 - \rho_1) g \cos \alpha \cos 3\beta] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\rho_2 - \rho_1}{2} g \left(\sin \beta - \frac{1}{3} \sin 3\beta \right) \sin 3\beta \cos \alpha \right\} \\
 b_3 &= \frac{(\rho_2 - \rho_1) g \sin 3\beta \cos \alpha}{6} + \\
 &\quad \frac{\sin \beta - 3\sin 3\beta}{2(3+\cos 2\beta-4\cos 4\beta)(\cos 3\beta - \cos \beta)} \cdot \\
 &\quad \left\{ \frac{\cos \beta - \cos 3\beta}{6} [\rho_2 g \cos(\beta-\alpha) \right. \\
 &\quad \left. - (\rho_2 - \rho_1) g \cos \alpha \cos 3\beta] - \right. \\
 &\quad \left. \frac{\rho_1 - \rho_2}{2} g \left(\sin \beta - \frac{1}{3} \sin 3\beta \right) \sin 3\beta \cos \alpha \right\}
 \end{aligned} \tag{6-84}$$

将 a_1, b_1, a_3, b_3 代入式(6-81)后, 即得坝体内任一点的应力。

现在考虑 $\alpha=0$ 的情况, 即迎水面垂直于坝基的情况, 如图 6-22 所示。显然, 此问题的解答可直接在上述解式(6-83)和式(6-84)中令 $\alpha=0$, 即可得此问题的极坐标形式的解答。

今采用直角坐标法重新求解:

取应力函数为

$$\varphi_f = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \quad (6-85)$$

体力分量是

$$\begin{aligned} F_{bx} &= 0 \\ F_{by} &= \rho_2 g \end{aligned}$$

应力分量为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial y^2} - F_{bx} = 2cx + 6dy \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial x^2} - F_{by} = 6ax + 2by - \rho_2 gy \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi_f}{\partial x \partial y} = -2bx - 2cy \end{aligned} \right\} \quad (6-86)$$

应力边界条件在迎水面边界,即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x |_{x=0} &= -\rho_1 gy \\ \tau_{xy} |_{x=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-87)$$

在自由表面边界 $x = y \tan \beta$ 上,应力边界条件为

$$\left. \begin{aligned} l_1 \sigma_x |_{x=y \tan \beta} + l_2 \tau_{xy} |_{x=y \tan \beta} &= 0 \\ l_1 \tau_{xy} |_{x=y \tan \beta} + l_2 \sigma_y |_{x=y \tan \beta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-88)$$

但由图可见

$$\begin{aligned} l_1 &= \cos \beta \\ l_2 &= -\sin \beta \end{aligned}$$

式(6-86)代入式(6-87)中,有

$$\begin{aligned} 6dy &= -\rho_1 gy \\ -2cy &= 0 \end{aligned}$$

由此得

$$c = 0, \quad d = -\frac{1}{6} \rho_1 g$$

及

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\rho_1 gy \\ \sigma_y &= 6ax + 2by - \rho_2 gy \\ \tau_{xy} &= -2bx \end{aligned} \right\} \quad (6-89)$$

将式(6-86)代入式(6-88),即有

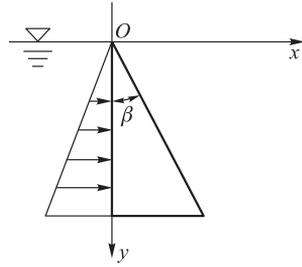


图 6-22

$$b = \frac{1}{2} \rho_1 g \tan^2 \beta$$

$$a = \frac{1}{6} \rho_2 g \cot \beta - \frac{1}{3} \rho_1 g \cot^3 \beta$$

由此得应力解答为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\rho_1 g y \\ \sigma_y &= (\rho_2 g \cot \beta - 2\rho_1 g \cot^3 \beta) x + (\rho_1 g \cot^2 \beta - \rho_2 g) y \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= -\rho_1 g x \cot^2 \beta \end{aligned} \right\} \quad (6-90)$$

进一步分析可以给出最大压应力轨迹和最大拉应力轨迹(图 6-23)。由图看出,在迎水面,最大压应力总是垂直于表面($x=0$ 面),但远离此表面以后,即迅速向下倾斜,而最大拉应力,则垂直于自由表面。

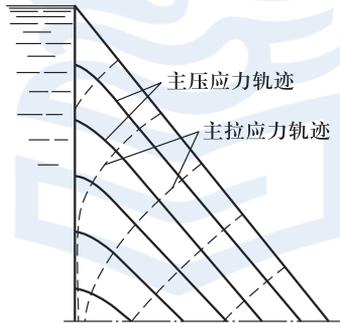


图 6-23

§ 6-9 圆孔孔边应力集中

本节讨论对边受均匀拉力作用的带孔平板,设孔为圆形,半径为 a ,且与板的尺寸相比为很小(图 6-24)。则孔边的应力将远大于无孔时的应力,这种现象称为应力集中。

由圣维南原理可知,在远离小孔的地方,孔边局部应力集中的影响将消失。对于无孔板来说,板中应力为

$$\sigma_x = q, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0$$

与之相应的应力函数为

$$\varphi_{10} = \frac{1}{2} q y^2 \quad (6-91)$$

用极坐标表示为

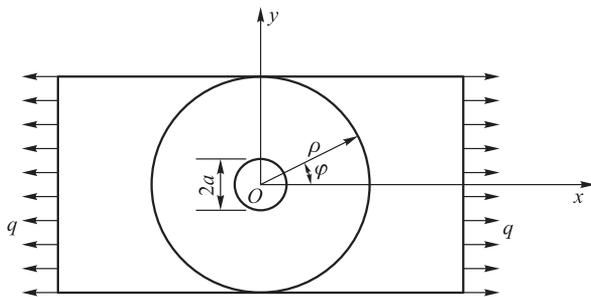


图 6-24

$$\varphi_{10} = \frac{1}{2} q \rho^2 \sin^2 \varphi = \frac{1}{4} q \rho^2 (1 - \cos 2\varphi) \quad (6-92)$$

现在要找一个应力函数 φ_r , 使它适用于有圆孔的板, 且在 ρ 值足够大时与应力函数 φ_{10} 给出的应力相同。

取应力函数为下列形式

$$\varphi_r = f_1(\rho) + f_2(\rho) \cos 2\varphi \quad (6-93)$$

将式(6-93)代入式(6-49), 得

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) \left(\frac{d^2 f_1}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d f_1}{d\rho} \right) + \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{4}{\rho^2} \right) \left(\frac{d^2 f_2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d f_2}{d\rho} - \frac{4 f_2}{\rho^2} \right) \cos 2\varphi = 0 \quad (6-94)$$

因上式对所有的 φ 均应满足, 即 $\cos 2\varphi \neq 0$, 故有

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) \left(\frac{d^2 f_1}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d f_1}{d\rho} \right) &= 0 \\ \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{4}{\rho^2} \right) \left(\frac{d^2 f_2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d f_2}{d\rho} - \frac{4 f_2}{\rho^2} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-95)$$

上式(6-95)第一式为欧拉方程, 其特解为

$$f_1 = \rho^n \quad (6-96)$$

于是得

$$\frac{d^2 f_1}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d f_1}{d\rho} = [n(n-1) + n] \rho^{n-2} = n^2 \rho^{n-2} \quad (6-97)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) n^2 \rho^{n-2} &= n^2 [(n-2)(n-3) + (n-2)] \rho^{n-4} \\ &= n^2 (n-2)^2 \rho^{n-4} = 0 \end{aligned} \quad (6-98)$$

特征方程为

$$n^2(n-2)^2 = 0 \quad (6-99)$$

其 4 个根为

$$n_{1,2} = 0, \quad n_{3,4} = 2$$

从而得式(6-95)第一式的通解为

$$f_1 = C_1 + C_2 \ln \rho + C_3 \rho^2 + C_4 \rho^2 \ln \rho \quad (6-100)$$

式(6-95)第二式也是欧拉线性方程,其特解同样为

$$f_2 = \rho^n$$

类似地有

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f_2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df_2}{d\rho} - \frac{4f_2}{\rho^2} &= [n(n-1) + (n-4)] \rho^{n-2} \\ &= (n+2)(n-2) \rho^{n-2} \end{aligned} \quad (6-101)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{4}{\rho^2} \right) (n+2)(n-2) \rho^{n-2} & \quad (6-102) \\ = (n+2)(n-2) [(n-1)(n-3) + n-2-4] \rho^{n-4} \\ = (n+2)n(n-2)(n-4) \rho^{n-4} \end{aligned}$$

因而 n 的 4 个值为

$$n_1 = -2, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = 2, \quad n_4 = 4$$

于是得式(6-95)第二式的通解为

$$f_2 = \frac{C_5}{\rho^2} + C_6 + C_7 \rho^2 + C_8 \rho^4 \quad (6-103)$$

于是

$$\begin{aligned} \varphi_i = f_1 + f_2 \cos 2\varphi &= C_1 + C_2 \ln \rho + C_3 \rho^2 + C_4 \rho^2 \ln \rho + \\ & \left(\frac{C_5}{\rho^2} + C_6 + C_7 \rho^2 + C_8 \rho^4 \right) \cos 2\varphi \end{aligned} \quad (6-104)$$

代入式(6-40),有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho &= C_2 \frac{1}{\rho^2} + 2C_3 + C_4 (1 + 2 \ln \rho) - \left(\frac{6C_5}{\rho^4} + \frac{4C_6}{\rho^2} + 2C_7 \right) \cos 2\varphi \\ \sigma_\varphi &= -C_2 \frac{1}{\rho^2} + 2C_3 + C_4 (3 + 2 \ln \rho) + \left(\frac{6C_5}{\rho^4} + 2C_7 + 12C_8 \rho^2 \right) \cos 2\varphi \\ \tau_{\rho\varphi} &= \left(-\frac{6C_5}{\rho^4} - \frac{2C_6}{\rho^2} + 2C_7 + 6C_8 \rho^2 \right) \sin 2\varphi \end{aligned} \right\} \quad (6-105)$$

上式中的常数,应根据下列条件确定:

(1) 当 $\rho \rightarrow \infty$ 时, 应力应保持有限;

(2) 当 $\rho = a$ 时, $\sigma_\rho = \tau_{\rho\varphi} = 0$ 。

由第一个条件, 因当 $\rho \rightarrow \infty$, 以 C_4, C_8 为系数的项无限增长, 故

$$C_4 = C_8 = 0$$

由第二个条件, 当 $\rho = a$ 时, $\sigma_\rho = 0$, 有

$$2C_3 + \frac{C_2}{a^2} = 0, \quad 2C_7 + \frac{6C_5}{a^4} + \frac{4C_6}{a^2} = 0 \quad (\text{a})$$

及 $\rho = a$ 时, $\tau_{\rho\varphi} = 0$, 有

$$2C_7 - \frac{6C_5}{a^4} - \frac{2C_6}{a^2} = 0 \quad (\text{b})$$

此外, 应力函数 φ_i 在 ρ 足够大时给出的应力应与 φ_{i0} 给出的应力相同。因 $\varphi_{i0} = \frac{1}{4}q\rho^2 - \frac{1}{4}q\rho^2 \cos 2\varphi$, 故由 φ_{i0} 确定的应力分量为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho^0 &= \frac{1}{2}q(1 + \cos 2\varphi) \\ \sigma_\varphi^0 &= \frac{1}{2}q(1 - \cos 2\varphi) \\ \tau_{\rho\varphi}^0 &= -\frac{1}{2}q \sin 2\varphi \end{aligned} \right\} \quad (6-106)$$

于是, 以上要求即在 $\rho \rightarrow \infty$ 的条件下, 式(6-105)应与式(6-106)相等。由此, 得

$$2C_7 = -\frac{1}{2}q, \quad 2C_3 = \frac{1}{2}q \quad (\text{c})$$

解式(a), (b), (c), 得

$$C_2 = -\frac{1}{2}qa^2, \quad C_3 = \frac{1}{4}q, \quad C_5 = -\frac{1}{4}qa^4, \quad C_6 = \frac{1}{2}qa^2, \quad C_7 = -\frac{1}{4}q$$

将以上结果代入式(6-104), 并弃去 C_1 (因它对应力分量没有影响), 得应力函数为

$$\varphi_i = \frac{1}{4}q \left[\rho^2 - 2a^2 \ln \rho - \left(\rho^2 - 2a^2 + \frac{a^4}{\rho^2} \right) \cos 2\varphi \right] \quad (6-107)$$

各应力分量为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\rho} &= \frac{1}{2}q \left[1 - \frac{a^2}{\rho^2} - \left(1 - \frac{4a^2}{\rho^2} + \frac{3a^4}{\rho^4} \right) \cos 2\varphi \right] \\ \sigma_{\varphi} &= \frac{1}{2}q \left[1 + \frac{a^2}{\rho^2} - \left(1 + \frac{3a^4}{\rho^4} \right) \cos 2\varphi \right] \\ \tau_{\rho\varphi} &= -\frac{1}{2}q \left(1 + \frac{2a^2}{\rho^2} - \frac{3a^4}{\rho^4} \right) \sin 2\varphi \end{aligned} \right\} \quad (6-108)$$

人们关心的是圆边(即 $\rho=a$ 和 $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$)处的应力。实际上,由式(6-108)可得出(图 6-25a):当 $\rho=a$ 时, $\sigma_{\rho}=0, \tau_{\rho\varphi}=0$, 且

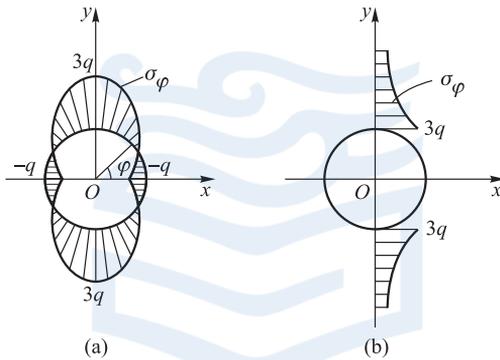


图 6-25

$$\sigma_{\varphi} = q(1 - 2\cos 2\varphi) \quad (6-109)$$

而当 $\rho=a, \varphi=\pm\frac{\pi}{2}$ 时, $\sigma_{\varphi}=3q$; 当 $\varphi=0$ 或 $\varphi=\pi$ 时, $\sigma_{\varphi}=-q$ 。

当 $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$ 时, σ_{φ} 随 ρ 的变化而变化的关系为(图 6-25b)

$$\sigma_{\varphi} = q \left(1 + \frac{a^2}{2\rho^2} + \frac{3a^4}{2\rho^4} \right) \quad (6-110)$$

当 $\rho=a$ 时, $\sigma_{\varphi}=3q$, 这就是说, 板条拉伸时孔边的最大拉应力为平均拉应力的 3 倍。而当 $\varphi=0$ 或 $\varphi=\pi$ 时, $\sigma_{\varphi}=-q$, 为压应力。再由式(6-110)可知, 当 $\rho=2a$ 时, $\sigma_{\varphi}=1.22q$; 当 $\rho=3a$ 时, $\sigma_{\varphi}=1.07q$; 当 ρ 足够大时, $\sigma_{\varphi} \rightarrow q$; 即应力集中现象只发生在孔边附近, 远离孔边即迅速衰减下去。

应当指出, 在孔的尺寸 $2a$ (图 6-26) 与平板尺寸 d 相比为很小时 ($2a \ll d$), 可采用下列近似公式

$$(\sigma_{\varphi})_{\max} = 3q \frac{d}{d-a} \quad (6-111)$$

对于椭圆形的孔,当椭圆的一个主轴(2b)与受拉方向一致时(图 6-27),则在另一主轴(2a)端部产生的应力为

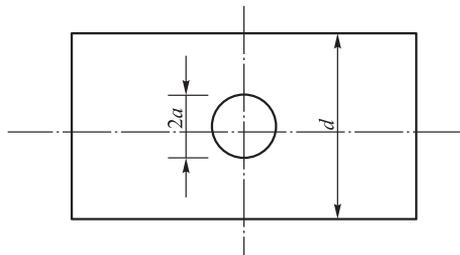


图 6-26

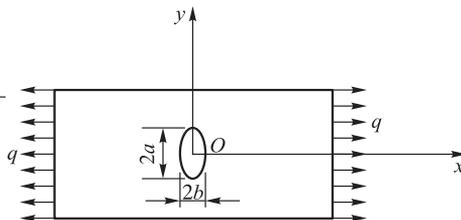


图 6-27

$$(\sigma_{\varphi})_{\max} = q \left(1 + \frac{2a}{b} \right) \quad (6-112)$$

由此可见,如 $a > b$, 则 $(\sigma_{\varphi})_{\max} > 3q$, 且当 $b \rightarrow 0$, 即椭圆孔趋于一条裂纹时, 裂纹尖端的应力是相当大的。这种情况说明,垂直于受拉方向的裂纹首先在端部扩展。为防止裂纹的扩展,常在裂纹尖端钻一小孔以降低应力集中系数。

本章复习要点

1. 在平面问题中,当不计体力时,应变协调方程简化为调和方程(称为莱维方程):

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

2. 在平面问题的平衡方程、应变协调方程和边界条件中,均不含材料常数,故平面应力问题或是平面应变问题,它们的应力分布是相同的。这是模型试验的理论基础。

3. 艾里应力函数 φ_f 为双调和函数:

$$\nabla^4 \varphi_f = 0$$

及其特性。

4. 逆解法与半逆解法的技巧。

5. 适用于直角坐标和极坐标解题的特点,几种应用专题应力分布的特点。

思考题

6-1 为什么平面应力和平面应变问题的应力分布是相同的?

- 6-2 应力函数的选取有哪些注意点?
- 6-3 为什么坝体应力分布的主拉应力轨迹总是与主压应力轨迹相互正交?
- 6-4 在半平面表面受集中力作用时,物体中的最大切应力轨迹为什么是一族对数螺线?
- 6-5 什么样的问题可以简化成平面应力问题或平面应变问题?
- 6-6 用应力函数解问题时,应有哪些步骤?

习 题

6-1 求下图中给出的圆弧曲梁内的应力分布。

提示:1) 选用极坐标;

2) 应力函数取 $\varphi_i = f(\rho) \sin \varphi$ 。

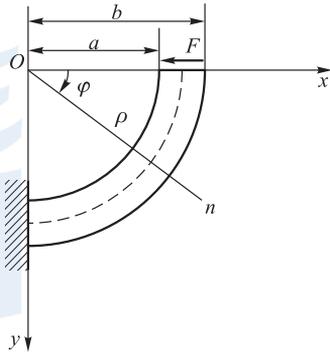
答案:

$$\sigma_\rho = \frac{F}{N} \left(\rho + \frac{a^2 b^2}{\rho^3} - \frac{a^2 + b^2}{\rho} \right) \sin \varphi,$$

$$\sigma_\varphi = \frac{F}{N} \left(3\rho - \frac{a^2 b^2}{\rho^3} - \frac{a^2 + b^2}{\rho} \right) \sin \varphi,$$

$$\tau_{\rho\varphi} = -\frac{F}{N} \left(\rho + \frac{a^2 b^2}{\rho^3} - \frac{a^2 + b^2}{\rho} \right) \cos \varphi,$$

$$N = a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) \ln \frac{b}{a}.$$



题 6-1 图

6-2 试分析下列应力函数可解什么样的平面应力问题

$$\varphi_i = \frac{3F}{4c} \left(xy - \frac{xy^3}{3c^2} \right) + \frac{q}{2} y^2$$

6-3 悬臂梁 $(-c < y < c, 0 < x < l)$ 沿下边受均布剪力,而上边和 $x = l$ 的一端不受荷载时,可用应力函数

$$\varphi_i = s \left(\frac{1}{4} xy - \frac{xy^2}{4c} - \frac{xy^3}{4c^2} + \frac{ly^2}{4c} + \frac{ly^3}{4c^2} \right)$$

得出解答。并说明,此解答在哪些方面是不完善的。

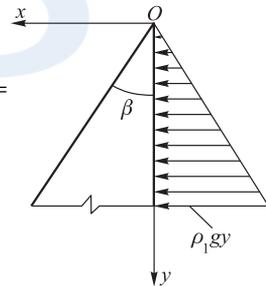
6-4 已求得三角形坝体的应力场为

$$\begin{aligned} \sigma_x &= ax + by \\ \sigma_y &= cx + dy \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= -dx - ay - \rho g x \\ \tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z &= 0 \end{aligned}$$

其中 ρ 为坝体材料密度, ρ_1 为水的密度,试根据边界条件求常数 a, b, c, d 的值。

答案: $a = 0, b = -\rho_1 g, c = \rho g \cot \beta - 2\rho_1 g \cot^3 \beta, d = \rho_1 g \cot^2 \beta - \rho g$ 。

6-5 试以简支梁受均布荷载作用为例,求当泊松比 $\nu = 0.3$ 时,用初等理论给出的结果



题 6-4 图

的误差不超过 2.5% 时的跨长 l 与梁高 h 之比。

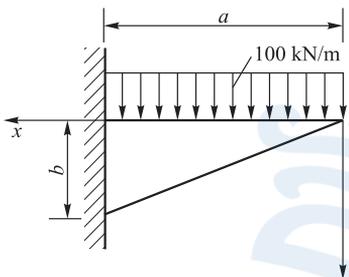
答案: $\frac{h}{l} \leq 0.1085$ 。

6-6 图中的悬臂梁受均布荷载作用, 试求其最大应力。

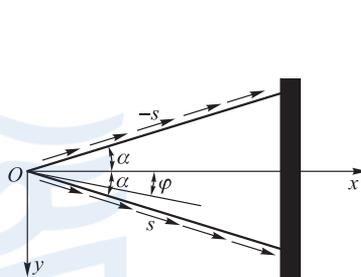
(1) 用应力函数

$$\varphi_t = \frac{q}{2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)} \left[-x^2 + xy + (x^2 + y^2) \left(\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{y}{x} \right) \right]$$

(2) 用初等理论求, 并比较以上结果。



题 6-6 图



题 6-7 图

6-7 试确定应力函数

$$\varphi_t = c\rho^2 (\cos 2\varphi - \cos 2\alpha)$$

中的常数 c 值, 使满足图中的条件: 在 $\varphi = \alpha$ 面上, $\sigma_\varphi = 0, \tau_{\rho\varphi} = s$; 在 $\varphi = -\alpha$ 面上, $\sigma_\varphi = 0, \tau_{\rho\varphi} = -s$ 。并证明楔顶没有集中力或力偶作用。

答案: $c = \frac{s}{2 \sin 2\alpha}$ 。

第七章

能量原理及其应用

§ 7-1 基本概念

在第五章中曾经谈到,求解弹性力学问题,归结为求解偏微分方程的某种边界值问题。如对空间问题来说,泛定方程为含有 15 个未知量的 15 个偏微分方程,在给定边界条件时,求解是极其困难的,而且往往是不可能的。本章将讨论利用能量原理求解弹塑性力学问题的方法。

一、变形过程热力学本质

研究物体的状态,不仅要知道物体的变形状态,而且要知道物体中每一点的温度。若物体在变形过程中,各点的温度与其周围介质的温度保持平衡,则称这一过程为等温过程。若在变形过程中,物体的温度没有什么升降,也没有损失或增加热量,则称这一过程为绝热过程。物体的瞬态高频振动,高速变形过程都可视为绝热过程。

物体在外界因素影响下的变形过程,严格说来都是一个热力学过程。如令物体的动能为 E_k ,应变能为 U ,则在微小的 δt 时间间隔内,物体从一种状态过渡到另一种状态时,根据热力学第一定律,总能量的变化为

$$\delta E_k + \delta U = \delta W + \delta Q \quad (7-1)$$

此处 δW 为体力 F_{bi} 与面力 p_i 所完成的功, δQ 为物体从其周围介质所吸收(或向外散发)的热量,且以等量的功来度量。若用 V 表示物体的体积,用 u_i 表示位移,则已知物体的动能为

$$E_k = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV$$

其中 $\dot{u}_i = \partial u_i / \partial t$, 动能的变化 δE_k 为

$$\delta E_k = \left(\frac{\partial E_k}{\partial t} \right) \delta t = \iiint_V \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i \delta t dV \quad (7-2)$$

若在外力作用下物体处于平衡状态,则 $\ddot{u}_i = 0$, 得

$$\delta E_k = 0$$

假定弹性变形过程是绝热的,则 $\delta Q = 0$, 于是有

$$\delta U = \delta W \quad (7-3)$$

就是说,外力所做的功等于物体中应变能的变化,或者说,外力所做的功,全部转化为物体的应变能。

二、应变能与应变余能

由第四章和以上的讨论知道,在线弹性情况下,单位体积的应变能为

$$U_0 = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

以一维应力状态为例, U_0 实际上是 $\sigma_x - \varepsilon_x$ 平面内,应力应变曲线与 ε_x 轴和 $\varepsilon_x = \varepsilon'_x$ 所包围的面积(图 7-1),即

$$U_0 = \int_0^{\varepsilon'_x} \sigma_x d\varepsilon_x \quad (7-4)$$

现在,定义另一个重要的量

$$U'_0 = \int_0^{\sigma'_x} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} \quad (7-5)$$

在一维状态下,有

$$U'_0 = \int_0^{\sigma'_x} \varepsilon_x d\sigma_x \quad (7-6)$$

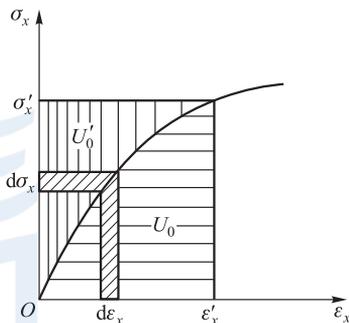


图 7-1

U'_0 称为单位体积的应变余能(也称为应力能),简称余能。

应变能 U_0 表示物体受外力作用时,储存于变形物体中的能量。而应变余能 U'_0 的物理解释便不明显。在图 7-1 中,它只表示 $\sigma_x - \varepsilon_x$ 曲线与轴 σ_x 及 $\sigma_x = \sigma'_x$ 所围成的面积, σ'_x 为物体内部指定时刻的应力,相应的应变为 ε'_x ,则 $\varepsilon'_x \sigma'_x = U_0 + U'_0$ 。 U_0 与 U'_0 分别互补(或互余)对方为 $\varepsilon'_x \sigma'_x$ 矩形的面积。显然,在曲线 $\sigma_x - \varepsilon_x$ 为直线时(即线弹性情况), $U_0 = U'_0$,即余能在数量上等于应变能。

余能是一个重要的概念,尽管它不像应变能那样有明确的物理意义,但引入余能的概念以后,讨论问题的范围就大为扩大了。对余能的认识应强调以下三点:

- (1) 应变余能与应变能是互补的,面积 $\varepsilon'_x \sigma'_x = U_0 + U'_0$;
- (2) 在应变余能的积分式中,积分变量为应力分量

$$U'_0 = \int_0^{\sigma'_x} \varepsilon_x d\sigma_x;$$

- (3) 在线弹性时 $U_0 = U'_0$ ($U_0 = \int_0^{\varepsilon'_x} \sigma_x d\varepsilon_x$)。

§ 7-2 虚位移原理

现在考虑一个受一组体力 F_{bi} (分量为 F_{bx}, F_{by}, F_{bz}) 和面力 p_i (分量为 p_x, p_y, p_z) 作用而处于平衡状态的物体, 其体积为 V , 表面积为 S 。则在体积 V 内有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_{bx} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_{by} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_{bz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7-7)$$

或用张量表示为

$$\sigma_{ij,j} + F_{bi} = 0 \quad (i, j = x, y, z) \quad (7-8)$$

设 S 为物体的全部表面, 其中给定面力的部分表面为 S_σ , 给定位移的部分表面为 S_u (图 7-2), 则全部表面 S 应为 S_σ 与 S_u 之和。如将给定的已知量用字母上加一横线表示 (以下常省略), 则在第二章讨论过的边界条件式 (2-19) 为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x l_1 + \tau_{xy} l_2 + \tau_{xz} l_3 - \bar{p}_x &= 0 \\ \tau_{yx} l_1 + \sigma_y l_2 + \tau_{yz} l_3 - \bar{p}_y &= 0 \\ \tau_{zx} l_1 + \tau_{yz} l_2 + \sigma_z l_3 - \bar{p}_z &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ (在 } S_\sigma \text{ 上)} \quad (7-9)$$

或

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{p}_i \quad (i, j = x, y, z) \text{ (在 } S_\sigma \text{ 上)} \quad (7-10)$$

现在设想一个处于平衡状态的物体, 由于某种原因, 由其平衡位置得到了一个约束许可的、任意的、微小虚位移 δu_i ; 其分量为 $\delta u, \delta v, \delta w$ 。实际的力系在虚位移上所做的功称为虚功。

虚位移原理: 在外力作用下处于平衡状态的可变形体, 当给予物体微小虚位移时, 外力的总虚功等于物体的总虚应变能。

外力的总虚功 δW 为实际的体力 F_{bi} 和面力 \bar{p}_i 在虚位移上所做的功, 即

$$\delta W = \iiint_V (F_{bx} \delta u + F_{by} \delta v + F_{bz} \delta w) dV +$$

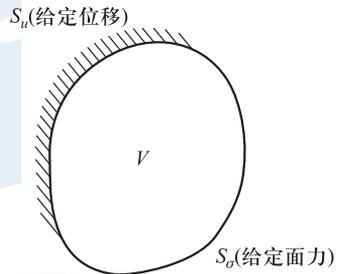


图 7-2

$$\iint_{S_\sigma} (\bar{p}_x \delta u + \bar{p}_y \delta v + \bar{p}_z \delta w) dS \quad (7-11)$$

或

$$\delta W = \int_V F_{bi} \delta u_i dV + \int_{S_\sigma} \bar{p}_i \delta u_i dS \quad (7-11')$$

在物体产生微小虚变形的过程中,该物体内的总虚应变能为

$$\delta U = \iiint_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dV \quad (7-12)$$

或

$$\delta U = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (7-12')$$

于是虚位移原理可表示为

$$\begin{aligned} & \iiint_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dV \\ &= \iiint_V (F_{bx} \delta u + F_{by} \delta v + F_{bz} \delta w) dV + \iint_{S_\sigma} (\bar{p}_x \delta u + \bar{p}_y \delta v + \bar{p}_z \delta w) dS \end{aligned} \quad (7-13)$$

或

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V F_{bi} \delta u_i dV + \int_{S_\sigma} \bar{p}_i \delta u_i dS \quad (7-13')$$

即

$$\delta U = \delta W$$

上式(7-13)为虚位移原理的位移变分方程。

以下给出详细证明。

若在虚位移原理的变分方程(7-13)中,考虑到在给定位移的部分表面 S_u 上,约束不允许位移再有任何微小的变化, $\delta u_i = 0$, 在给定位力的部分表面 S_σ 上,边界条件 $\bar{p}_i = \sigma_{ij} n_j$ 成立。因而式(7-13)中对 S_σ 的积分可以写成对 S 的积分,即有

$$\delta W = \int_{S_\sigma} \bar{p}_i \delta u_i dS + \int_V F_{bi} \delta u_i dV = \int_S \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS + \int_V \bar{F}_{bi} \delta u_i dV \quad (7-14)$$

运用高斯散度定理

$$\iiint_V \left(\frac{\partial(\sigma_x \delta u)}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_y \delta v)}{\partial y} + \frac{\partial(\sigma_z \delta w)}{\partial z} \right) dV \quad (7-15)$$

$$= \iint_S (\sigma_x \delta u l_1 + \sigma_y \delta v l_2 + \sigma_z \delta w l_3) dS$$

其中 l_1, l_2, l_3 为边界外法线方向单位矢量 \mathbf{n} 的方向余弦

$$l_1 = \cos(x, \mathbf{n}), l_2 = \cos(y, \mathbf{n}), l_3 = \cos(z, \mathbf{n})$$

则式(7-15)的缩写形式为

$$\int_V (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} dV = \int_S \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS \quad (7-15')$$

此处 $n_j = l_1, l_2, l_3$, 将式(7-15')代入式(7-14), 得

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_V (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} dV + \int_V F_{bi} \delta u_i dV \\ &= \int_V (\sigma_{ij,j} \delta u_i + \sigma_{ij} \delta u_{i,j}) dV + \int_V F_{bi} \delta u_i dV \\ &= \int_V (\sigma_{ij,j} + F_{bi}) \delta u_i dV + \int_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV \end{aligned}$$

当物体处于平衡状态时, 因为

$$\sigma_{ij,j} + F_{bi} = 0$$

此时上式第一项积分等于零。而由

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad \delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i})$$

故

$$\sigma_{ij} \delta u_{i,j} = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \quad (7-16)$$

于是得到

$$\delta W = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV$$

即

$$\delta W = \delta U$$

以上实质上证明了, 当给予系统微小虚位移时, 外力的总虚功与物体的总应变能相等是物体处于平衡状态的必要条件。此外, 还可以证明 $\delta W = \delta U$ 是物体处于平衡状态的充分条件, 即由 $\delta W = \delta U$, 导出平衡方程

$$\sigma_{ij,j} + F_{bi} = 0$$

和应力边界条件

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{p}_i$$

读者可以自行校验。

由以上讨论可知, 虚位移原理变分方程(7-13)等价于平衡方程与应力边界条件。因此, 满足变分方程(7-13)的解就一定满足平衡方程和应力边界条件。由此, 虚位移原理也可表述为: 变形连续体平衡的必要与充分条件是, 对于任意微小虚位移, 外力所做总虚功等于变形体所产生的总虚应变能。

应当指出, 式(7-13)等号左边表示由于产生虚位移 δu_i 而引起的物体内的



[标注 7-1:
导数运算与
变分运算可
互换顺序]



[标注 7-2:
式(7-16)的
推导]



[标注 7-3:
由虚位移原
理导出平衡
方程和应力
边界条件]

总虚应变能。这种虚位移实际上应理解为真实位移的变分,而不是其他随便一种位移函数。这就是说,式(7-13)中的 $\delta\varepsilon_x, \delta\varepsilon_y, \dots, \delta\gamma_{xz}$ 不是别的什么虚应变,而是由于 $\delta u, \delta v$ 和 δw 引起的,即它们之间满足下列条件

$$\left. \begin{aligned} \delta\varepsilon_x &= \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\delta u) \\ \delta\varepsilon_y &= \delta \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (\delta v) \\ \delta\varepsilon_z &= \delta \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (\delta w) \\ \delta\gamma_{xy} &= \delta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\delta v) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta u) \\ \delta\gamma_{yz} &= \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) + \frac{\partial}{\partial z} (\delta v) \\ \delta\gamma_{xz} &= \delta \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (\delta u) + \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) \end{aligned} \right\} \quad (7-17)$$

或

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) \quad (7-17')$$

此外 u_i 应满足在 S_u 上的位移边界条件 $u_i = \bar{u}_i$, 即

$$\delta u_i = 0 \quad (7-18)$$

式(7-17)和式(7-18)即为方程(7-13)的2个附加条件。

现在给出虚位移原理[式(7-13)]的物理解释,在图7-3中所示物体内取一微小六面体。为清晰起见,图中只画出了上表面上的应力分量。在变形前,其6个面都分别与 xy, yz, zx 平面平行。作用在各面上的应力矢量为

$$\text{左侧面} \quad -(\sigma_x \mathbf{i} + \tau_{xy} \mathbf{j} + \tau_{xz} \mathbf{k})$$

$$\text{右侧面} \quad \sigma_x \mathbf{i} + \tau_{xy} \mathbf{j} + \tau_{xz} \mathbf{k} + \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x \mathbf{i} + \tau_{xy} \mathbf{j} + \tau_{xz} \mathbf{k}) dx$$

$$\text{下表面} \quad -(\tau_{yx} \mathbf{i} + \sigma_y \mathbf{j} + \tau_{yz} \mathbf{k})$$

$$\text{上表面} \quad \tau_{yx} \mathbf{i} + \sigma_y \mathbf{j} + \tau_{yz} \mathbf{k} + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx} \mathbf{i} + \sigma_y \mathbf{j} + \tau_{yz} \mathbf{k}) dy$$

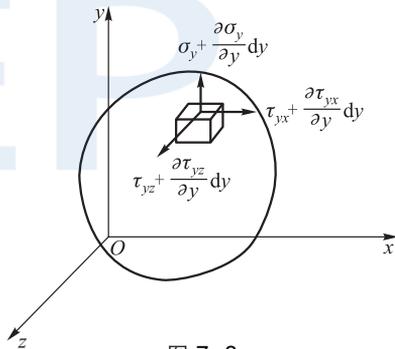


图 7-3

后表面 $-(\tau_{zx}\mathbf{i} + \tau_{zy}\mathbf{j} + \sigma_z\mathbf{k})$

前表面 $\tau_{zx}\mathbf{i} + \tau_{zy}\mathbf{j} + \sigma_z\mathbf{k} + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}\mathbf{i} + \tau_{zy}\mathbf{j} + \sigma_z\mathbf{k}) dz$

当物体有微小虚位移

$$\delta\mathbf{u} = \delta u\mathbf{i} + \delta v\mathbf{j} + \delta w\mathbf{k}$$

后,作用在微小六面体单元上的面力和体力就将完成下列虚功:

$$\begin{aligned} \delta W = & -(\sigma_x\mathbf{i} + \tau_{xy}\mathbf{j} + \tau_{xz}\mathbf{k})\delta u dydz + [\sigma_x\mathbf{i} + \tau_{xy}\mathbf{j} + \tau_{xz}\mathbf{k} + \\ & \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x\mathbf{i} + \tau_{xy}\mathbf{j} + \tau_{xz}\mathbf{k}) dx] \left[\delta u + \frac{\partial}{\partial x}(\delta u) dx \right] dydz + \cdots + \\ & (F_{bx}\delta u + F_{by}\delta v + F_{bz}\delta w) dx dy dz \end{aligned} \quad (\text{a})$$

在上式中略去高阶微量,并应用平衡方程之后,可得

$$\delta W = \left[\sigma_x \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial(\delta v)}{\partial y} + \cdots + \tau_{xy} \left(\frac{\partial(\delta u)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta v)}{\partial x} \right) \right] dx dy dz \quad (\text{b})$$

上式(b)表示每一个微小六面体单元在物体有微小虚位移时所做的虚功。如将物体分割成许多微小六面体单元,则每一微小单元都要做虚功 δW ,其中包括微小六面体各面上的应力与体力所做的虚功。现在设想,将分割后的那些微小六面体重新合拢,恢复原来的状态,则原来作为微小六面体的面力的那些应力就会互相抵消,它们所做的那一部分包含在 δW 中的虚功就将不复存在,而就整个物体求和以后,就只剩下体力和面力所做的虚功。这就是说,把全部 δW 在体积 V 内加起来应与整体的体力和面力在虚位移 $\delta u, \delta v, \delta w$ 上所完成总虚功相等,由此得

$$\begin{aligned} & \iiint_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \cdots + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dx dy dz \\ & = \iiint_V (F_{bx} \delta u + F_{by} \delta v + F_{bz} \delta w) dx dy dz + \\ & \quad \iint_{S_\sigma} (\bar{p}_x \delta u + \bar{p}_y \delta v + \bar{p}_z \delta w) dS \end{aligned}$$

此即虚功方程(7-13)。在应用此方程时,所选取的解,不必预先满足平衡方程和应力边界条件,只要求所给的虚位移 $\delta u, \delta v, \delta w$ 能满足附加条件式(7-17)和式(7-18),即要求满足变形协调条件和几何边界条件。

应当特别指出,虚位移原理的成立与材料的本构关系无关。就是说,虚位移原理对于弹性体、弹塑性体和理想塑性体等都是适用的。

下面给出应用虚位移原理的例题。

例 7-1 设有图 7-4 所示的简支梁,跨中附有弹性支承,受均布荷载 q 作

用。试写出梁的挠曲线的微分方程和边界条件。

解:梁在平衡状态有附加虚位移 δw 时,虚位移原理给出

$$\delta U = \delta W \quad (\text{a})$$

此处

$$\delta U = 2 \int_0^l \left(\int_A \sigma_x \delta \varepsilon_x dA \right) dx \quad (\text{b})$$

为简化起见,可沿用材料力学中梁弯曲的平截面假设,有

$$\varepsilon_x = -zw'', \quad \sigma_x = -Ezw''$$

$$\delta \varepsilon_x = -z\delta(w'') = -z(\delta w)''$$

代入式(b),并整理得

$$\delta U = 2EI \int_0^l w''(\delta w)'' dx$$

两次分部积分后,可化为

$$\delta U = 2EI \left[w''(\delta w)' \Big|_0^l - w^{(3)}(\delta w) \Big|_0^l + \int_0^l w^{(4)} \delta w dx \right] \quad (\text{c})$$

如令弹簧内的反力为 F ,则

$$\delta W = 2 \int_0^l q \delta w dx + F \delta w_c \quad (\text{d})$$

此处 w_c 为梁在弹簧支承 C 处的挠度。由此,式(a)化为

$$2 \int_0^l (EIw^{(4)} - q) \delta w dx + 2EIw''(\delta w)' \Big|_0^l - 2EIw^{(3)}(\delta w) \Big|_0^l + F \delta w_c = 0 \quad (\text{e})$$

边界条件为

$$(\delta w)'_l = 0, \quad (\delta w)_0 = 0, \quad (\delta w)_l = \delta w_c$$

除上述条件外, δw 与 $\delta w'$ 均为任意,故欲使式(e)成立,必有

$$(EIw'')_{x=0} = 0, \quad 2(EIw^{(3)})_{x=l} - F = 0 \quad (\text{f})$$

挠度函数 w 必须满足

$$EIw^{(4)} - q = 0 \quad (\text{g})$$

及

$$(w)_{x=0} = 0, \quad (w)'_{x=l} = 0 \quad (\text{h})$$

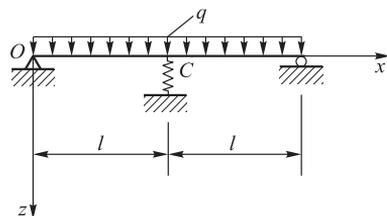


图 7-4



[标注 7-4:
关于例 7-1
的思考题]

§ 7-3 最小总势能原理

由虚位移原理可直接导出最小总势能原理。实际上,利用第四章 § 4-3 节中给出的应变能函数

$$U_0 = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \cdots + \tau_{zx} \gamma_{zx}) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (\text{a})$$

及

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (\text{b})$$

在 U_0 中引入广义胡克定律式(4-3)后,得

$$U_0 = G \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2} \theta^2 = U_0(\varepsilon_{ij}) \quad (\text{c})$$



[标注 7-5:
对 U_0 的说明]

其中 $\theta = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ 。

在上式中代入应变位移关系,得

$$U_0(u, v, w) = \frac{E\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{G}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]$$

当存在应变能函数 $U_0(u_i)$ 时,虚功方程可写为

$$\iiint_V \delta U_0(u_i) dV - \iiint_V (F_{bx} \delta u + F_{by} \delta v + F_{bz} \delta w) dV - \iint_{S_\sigma} (\bar{p}_x \delta u + \bar{p}_y \delta v + \bar{p}_z \delta w) dS = 0 \quad (7-19)$$

假定当受力变形后的物体从平衡位置再有微小虚位移时,物体的几何尺寸的变化略去不计。原来作用在物体上的体力 F_{bi} , 面力 \bar{p}_i , 其大小和方向都保持不变。于是,式(7-19)中的变分符号可以移至积分号以外,令 δE_p 记作这个变分量,有

$$\delta E_p = \delta \left[\iiint_V U_0(u_i) dV - \iiint_V (F_{bx} u + F_{by} v + F_{bz} w) dV - \iint_{S_\sigma} (\bar{p}_x u + \bar{p}_y v + \bar{p}_z w) dS \right] = 0$$

于是有

$$\delta E_p = \delta(U - W) = 0 \quad (7-20)$$

其中

$$E_p = \int_V [U_0(u_i) - F_{bi}u_i] dV - \iint_{S_\sigma} \bar{p}_i u_i dS \quad (7-20')$$

其附加条件为

$$u_i - \bar{u}_i = 0 \quad (\text{在 } S_u \text{ 上})$$

其中 \bar{u}_i 为已知量。

式(7-20)中, E_p 称为总势能, U 称为弹性体的应变势能, W 为外力所做的功, 即外力势能。当物体在不受外力作用的自然状态下, 应变势能与外力的势能均为零, 式(7-20)说明, 在给定的外力作用下, 实际的位移应使总势能的一阶变分为零, 即总势能取驻值。以下进一步证明总势能为最小。

对于稳定的平衡状态来说, 物体偏离平衡状态而有虚位移时, 其总势能的增量恒为正。实际上, 可以证明, 总势能 E_p 的二阶变分为正。为此, 令 u_i^* 为机动许可的位移场, u_i 为真实解的位移场, 与之相应的应变张量为 ε_{ij}^* 和 ε_{ij}

$$u_i^* = u_i + \delta u_i, \quad \varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij} + \delta \varepsilon_{ij}$$

如将 $U_0(\varepsilon_{ij}^*)$ 按泰勒级数展开, 略去二阶以上的高阶微量, 可得

$$U_0(\varepsilon_{ij}^*) = U_0(\varepsilon_{ij}) + \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 U_0}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \delta \varepsilon_{ij} \delta \varepsilon_{kl} \quad (d)$$

于是, 机动许可状态的总势能与真实状态总势能之差为

$$\begin{aligned} & E_p(\varepsilon_{ij}^*) - E_p(\varepsilon_{ij}) \\ &= \int_V U_0(\varepsilon_{ij} + \delta \varepsilon_{ij}) dV - \int_V U_0(\varepsilon_{ij}) dV - \int_V F_{bi} \delta u_i dV - \int_{S_\sigma} \bar{p}_i \delta u_i dS \\ &= \int_V \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} dV + \frac{1}{2} \int_V \frac{\partial^2 U_0}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \delta \varepsilon_{ij} \delta \varepsilon_{kl} dV - \int_V F_{bi} \delta u_i dV - \int_{S_\sigma} \bar{p}_i \delta u_i dS \end{aligned} \quad (e)$$

而

$$E_p(\varepsilon_{ij}^*) - E_p(\varepsilon_{ij}) = \delta E_p + \frac{1}{2!} \delta^2 E_p$$

其中

$$\delta E_p = \int_V \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_V F_{bi} \delta u_i dV - \int_{S_\sigma} \bar{p}_i \delta u_i dS = 0$$

故

$$\delta^2 E_p = \int_V \frac{\partial^2 U_0}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \delta \varepsilon_{ij} \delta \varepsilon_{kl} dV \quad (f)$$

如果想象应变由 0 增加到 $\delta\varepsilon_{ij}$, 由此产生的应变能

$$U_0(\delta\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2}\delta\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\delta\left(\frac{\partial U_0}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)\delta\varepsilon_{ij} = \delta\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U_0}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{kl}$$

从而得

$$E_p(\varepsilon_{ij}^*) - E_p(\varepsilon_{ij}) = \delta^2 E_p = \int_V U_0(\delta\varepsilon_{ij}) dV$$

由式(c)知 $U_0(\varepsilon_{ij})$ 为正定的, 故

$$\delta^2 E_p \geq 0, \quad E_p(\varepsilon_{ij}^*) \geq E_p(\varepsilon_{ij}) \quad (7-21)$$

于是, 得出下列最小总势能原理: 在所有满足给定几何边界条件的位移场中, 真实的位移场使物体的总势能取最小值。

物体在外力作用下所产生的位移场, 除了满足位移边界条件以外, 还必须满足以位移表示的平衡方程以及应力边界条件。最小总势能原理说明, 真实的位移除满足几何边界条件外, 还要满足最小总势能原理的变分方程。实际上可以证明, 变分方程(7-13)完全等价于平衡方程与应力边界条件。同样的结论也适用于式(7-20)。用最小势能原理和用泛定方程求解边值问题, 只是形式上不同。以后将看到, 这种解题手段的变更, 在不少情况下, 将给予我们很大的方便, 同时也扩大了解题的范围。以后还要讨论用变分方法求弹性力学问题的近似解。

由最小总势能原理可导出熟知的卡氏(Castigliano, A.)第一定理。实际上, 假定对于在一组广义力 $F_i (i=1, 2, \dots, n)$ 作用下处于平衡状态的弹性结构物, 系统的应变能可表示为相应的位移的函数 $U_0(\Delta_i)$, 系统的总势能为

$$E_p = U_0(\Delta_i) - \sum_{i=1}^n F_i \Delta_i \quad (g)$$

其中 Δ_i 为广义位移。由最小总势能原理

$$\delta E_p = \sum \frac{\partial E_p}{\partial \Delta_i} \delta \Delta_i = 0$$

由于变分 $\delta \Delta_i$ 的独立性, 可得

$$\frac{\partial E_p}{\partial \Delta_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

代入式(g), 得

$$\frac{\partial U_0}{\partial \Delta_i} = F_i \quad (7-22)$$

上式(7-22)说明, 当应变能 U_0 可用广义位移表示 [$U_0 = U_0(\Delta_i)$] 时, 则广义力由 $\partial U_0(\Delta_i) / \partial \Delta_i$ 给出, 此即卡氏第一定理。

例 7-2 设有受分布荷载集度为 $q(x)$ 作用的简支梁(图 7-5)。试用最小总势能原理导出梁的挠曲线方程。

解: 为简便计,略去切应力对应变能的贡献。

$$\delta E_p = \delta(U - W) = 0$$

$$\text{于是有 } U = \iiint U_0 dx dy dz = \frac{1}{2E} \iiint \sigma_x^2 dx dy dz$$

其中

$$\sigma_x = \frac{My}{I}, \quad M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad I = \iint y^2 dz dy$$

由此

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx \quad (\text{a})$$

$$W = \int_0^l q w dx \quad (\text{b})$$

根据 $\delta E_p = 0$, 变分量为 δw , 注意到

$$\delta w' = \delta \left(\frac{dw}{dx} \right) = \frac{d(\delta w)}{dx} = (\delta w)'$$

$$\delta EI(w'')^2 = 2EIw''\delta(w'') = 2EIw''(\delta w)''$$

故

$$\delta E_p = \int_0^l EIw''(\delta w)'' dx - \int_0^l q \delta w dx \quad (\text{c})$$

上式等号右边第一项积分利用两次分部积分, 可得

$$\int_0^l EIw''(\delta w)'' dx = EIw''(\delta w)' \Big|_0^l - (EIw'')' \delta w \Big|_0^l + \int_0^l (EIw'')'' \delta w dx \quad (\text{d})$$

对于简支端

$$(\delta w)_0 = (\delta w)_l = 0$$

故将式(d)代入式(c), 得

$$\int_0^l [(EIw'')'' - q] \delta w dx + EIw''(\delta w)' \Big|_0^l = 0$$

由 δw 的任意性, 得梁的挠曲线方程

$$(EIw'')'' - q = 0 \quad (\text{e})$$

和自然边界条件

$$(w'')_0 = (w'')_l = 0 \quad (\text{f})$$

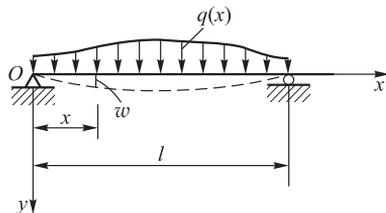


图 7-5

§ 7-4 虚应力原理

在 § 7-2 中,讨论了在外力作用下处于平衡状态的变形体,当有微小虚位移时,得出了外力的总虚功与物体内的总虚应变能相等的性质,并在考虑了物体弹性本构关系后,直接导出了最小总势能原理。本节讨论处于同样状态的物体,当应力分量有微小变化时的情况。为此,引进虚应力概念。所谓虚应力,是满足力的平衡条件及指定的力的边界条件的、任意的、微小的应力。虚应力记作 $\delta\sigma_x$, $\delta\sigma_y, \dots, \delta\tau_{zx}$ 。虚应力的特征是,它使改变后的应力分量

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_x &= \sigma_x + \delta\sigma_x \\ \sigma'_y &= \sigma_y + \delta\sigma_y \\ \dots\dots\dots \\ \tau'_{zx} &= \tau_{zx} + \delta\tau_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (\text{a})$$

或

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij} \quad (\text{a}')$$

仍满足平衡方程和应力边界条件,但并不要求满足变形协调方程。于是有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau'_{xz}}{\partial z} + \bar{F}_{bx} &= 0 \\ \frac{\partial\tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau'_{yz}}{\partial z} + \bar{F}_{by} &= 0 \\ \frac{\partial\tau'_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau'_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma'_z}{\partial z} + \bar{F}_{bz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{b})$$

或

$$\sigma'_{ij,j} + F_{bi} = 0$$

其中体力 F_{bi} 是给定的。于是,上式与产生虚应力以前的平衡方程相减后,可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(\delta\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\tau_{xz})}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial(\delta\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\sigma_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial(\delta\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\sigma_z)}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7-23)$$

或

$$(\delta\sigma_{ij})_{,j} = 0 \quad (7-23')$$

物体 V 的表面分为两部分,即给定面力的部分表面 S_σ 和给定位移的部分表面 S_u 。在 S_u 上,由于应力分量的变化,面力分量 p_x, p_y, p_z 也随之变化。于是,在 S_u 上有

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x + \delta\sigma_x)l_1 + (\tau_{xy} + \delta\tau_{xy})l_2 + (\tau_{xz} + \delta\tau_{xz})l_3 &= p_x + \delta p_x \\ (\tau_{yx} + \delta\tau_{yx})l_1 + (\sigma_y + \delta\sigma_y)l_2 + (\tau_{yz} + \delta\tau_{yz})l_3 &= p_y + \delta p_y \\ (\tau_{zx} + \delta\tau_{zx})l_1 + (\tau_{zy} + \delta\tau_{zy})l_2 + (\sigma_z + \delta\sigma_z)l_3 &= p_z + \delta p_z \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (7-24)$$

或

$$(\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij})n_j = p_i + \delta p_i$$

与原边界条件相减后,得

$$\left. \begin{aligned} l_1\delta\sigma_x + l_2\delta\tau_{xy} + l_3\delta\tau_{xz} &= \delta p_x \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (7-25)$$

或

$$\delta\sigma_{ij}n_j = \delta p_i \quad (7-25')$$

而在 S_σ 上有

$$\left. \begin{aligned} l_1\delta\sigma_x + l_2\delta\tau_{xy} + l_3\delta\tau_{xz} &= 0 \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (7-26)$$

或

$$\delta\sigma_{ij}n_j = 0 \quad (7-26')$$

现在物体处在给定条件下的平衡状态,位移分量和应变分量分别为 u, v, w 和 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \varepsilon_{xy}$, 且有

$$\varepsilon_x - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \dots, \quad \gamma_{xy} - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (\text{在 } V \text{ 内}) \quad (7-27)$$

$$u - \bar{u} = 0, \quad \dots, \quad w - \bar{w} = 0 \quad (\text{在 } S_u \text{ 上}) \quad (7-28)$$

如物体内的应力分量有一微小虚应力,则有

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left[\left(\varepsilon_x - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \delta\sigma_x + \left(\varepsilon_y - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \delta\sigma_y + \dots + \right. \\ & \quad \left. \left(\gamma_{xy} - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \delta\tau_{xy} \right] dV + \\ & \quad \iint_{S_u} [(u - \bar{u})\delta p_x + (v - \bar{v})\delta p_y + (w - \bar{w})\delta p_z] dS = 0 \end{aligned} \quad (7-29)$$

由分部积分和高斯散度定理,上式可化为

$$\iiint_V \left[\varepsilon_x \delta \sigma_x + \varepsilon_y \delta \sigma_y + \cdots + \gamma_{xy} \delta \tau_{xy} + \left(\frac{\partial \delta \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \delta \tau_{zx}}{\partial z} \right) u + \right. \\ \left. (\cdots)v + (\cdots)w \right] dV - \\ \iint_{S_\sigma} (u \delta p_x + v \delta p_y + w \delta p_z) dS - \iint_{S_u} (\bar{u} \delta p_x + \bar{v} \delta p_y + \bar{w} \delta p_z) dS = 0 \quad (7-30)$$

将式(7-23)代入后,考虑到在 S_σ 上 $\delta p_i = 0$ 上式简化为

$$\iiint_V (\varepsilon_x \delta \sigma_x + \varepsilon_y \delta \sigma_y + \varepsilon_z \delta \sigma_z + \gamma_{yz} \delta \tau_{yz} + \gamma_{zx} \delta \tau_{zx} + \gamma_{xy} \delta \tau_{xy}) dV - \\ \iint_{S_u} (\bar{u} \delta p_x + \bar{v} \delta p_y + \bar{w} \delta p_z) dS = 0 \quad (7-31)$$

或

$$\int_V \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV - \int_{S_u} \bar{u}_i \delta p_i dS = 0 \quad (7-31')$$

如令 $\delta W'$ 为虚外力在实际位移上所做的总虚功

$$\delta W' = \int_{S_u} \bar{u}_i \delta p_i dS$$

$\delta U'$ 为物体内的虚应力在实际应变上的总虚应变余能

$$\delta U' = \int_V \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV$$

则有

$$\delta W' = \delta U'$$

上式(7-31)表示虚应力原理,又称虚余功原理,可表述为:当物体处于平衡状态时,微小虚外力在真实位移上所做的总虚功,等于虚应力在真实应变上所做的总虚应变余能。显然,式(7-31)成立的附加条件为

$$\begin{aligned} (\delta \sigma_{ij})_{,j} &= 0 && \text{(在 } V \text{ 内)} \\ \delta p_i &= 0 && \text{(在 } S_\sigma \text{ 上)} \end{aligned}$$

由以上讨论可以看出,虚应力原理和虚位移原理在形式上是互补的。和虚位移原理一样,虚应力原理的成立也与材料的本构关系无关。

应当指出,在虚位移原理中包含了实际的外力和内力,因而可理解为,虚位移原理是对系统平衡的要求,而虚应力原理则包含有实际的位移和应变,所以可把虚应力原理看作是对物体变形协调的要求。实际上由虚应力原理的变分方程(7-31)不难导出变形协调方程,这就是说,式(7-31)等价于应变协调条件。于是,按式(7-31)解题时,对于所设解答,不必预先满足变形协调条件,而只须使虚应力 $\delta \sigma_{ij}$ 满足物体的平衡和应力边界条件。



[标注 7-6:
关于虚应力
原理的思
考题]

§ 7-5 最小总余能原理

由虚应力原理可直接导出最小总余能原理。为了避免混乱,今后把用应变表示的弹性应变能函数 $U(\varepsilon_{ij})$ 称为应变能函数,或应变能;而把用应力表示的应变余能函数称为余应变能函数,或应变余能(或应力能),记做 $U'(\sigma_{ij})$ 。如在虚应力原理中引进广义胡克定律,并认为应变状态是有势的,即应变分量可由余应变能函数导出。即

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial U'_0(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}$$

由 $\delta U'_0 = \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij}$ 及式(4-9),得

$$\begin{aligned} \delta U'_0 = & \frac{1}{E} [\sigma_x \delta \sigma_x + \sigma_y \delta \sigma_y + \sigma_z \delta \sigma_z - \nu(\sigma_x \delta \sigma_y + \\ & \sigma_y \delta \sigma_x + \sigma_y \delta \sigma_z + \sigma_z \delta \sigma_y + \sigma_z \delta \sigma_x + \sigma_x \delta \sigma_z)] + \\ & \frac{1}{G} (\tau_{xy} \delta \tau_{xy} + \tau_{yz} \delta \tau_{yz} + \tau_{zx} \delta \tau_{zx}) \end{aligned}$$

总应变余能的变分为

$$\delta U' = \iiint_V \delta U'_0(\sigma_{ij}) dV = \iiint_V \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV$$

于是式(7-31')化为

$$\iiint_V \delta U'_0(\sigma_{ij}) dV - \iint_{S_u} \bar{u}_i \delta p_i dS = 0$$

当有虚应力时,在边界 S_u 上,位移分量保持不变。于是,可把上式中的变分符号放在积分号外,即有

$$\begin{aligned} \delta \left[\iiint_V U'_0(\sigma_{ij}) dV - \iint_{S_u} (\bar{u}_p x + \bar{v}_p y + \bar{w}_p z) dS \right] \\ = \delta(U' - W) = 0 \end{aligned} \quad (7-32)$$

或

$$\delta \left[\iiint_V U'_0(\sigma_{ij}) dV - \iint_{S_u} (p_i \bar{u}_i) dS \right] = 0 \quad (7-32')$$

显然,在此情况下,附加条件为

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + F_{bi} &= 0 && \text{(在 } V \text{ 内)} \\ \sigma_{ij} n_j - \bar{p}_i &= 0 && \text{(在 } S_\sigma \text{ 上)} \end{aligned} \quad (7-33)$$

如令 E'_p 为物体的总余能, 即

$$E'_p = \iiint_V U'_0(\sigma_{ij}) dV - \iint_{S_u} (\bar{u}p_x + \bar{v}p_y + \bar{w}p_z) dS \quad (7-34)$$

则有

$$\delta E'_p = 0 \quad (7-32'')$$

上式(7-32)说明, 在所有满足平衡方程和应力边界条件(即, 静力许可)的应力场中, 真实的应力场使总余能取极值。

进一步分析可以证明

$$\delta^2 E'_p \geq 0$$

故得下列最小总余能原理: 在所有满足平衡方程和应力边界条件的应力场中, 真实的应力场使物体的总余能取最小值。

最小总余能原理以及最小势能原理都适用于线性、非线性弹性体。

我们知道, 物体的真实的应力场既满足平衡方程、应力边界条件, 又满足变形协调条件。由最小总余能原理知道, 真实的应力场, 满足平衡方程和应力边界条件, 还满足使总余能取最小值的条件。可见, 最小总余能原理与变形协调条件等价, 实际上, 通过直接变换, 可由变分方程(7-32)导出变形协调方程。

下面指出最小总余能原理的一种特殊情况。若在全局表面上给定面力, 则面力的变分等于零, 由式(7-34), 得

$$\delta E'_p = \delta U' = 0 \quad (7-35)$$

变分方程(7-35)称为最小功定理: 若物体的面力给定, 则在所有满足平衡方程和边界条件的应力场中, 真实的应力场使余应变能取最小值。对于线弹性体, 余应变能与应变能相等, 故式(7-35)又称为最小应变能定理。此时有

$$\delta U = 0 \quad (7-36)$$

如将最小总余能原理用于线弹性力学问题, 则不难导出熟知的卡氏第二定理。实际上, 如假定线性弹性结构上受 n 个未知广义力 F_1, F_2, \dots, F_n 的作用, 并认为结构的内力已由广义力表示, 则系统的总余能为

$$E'_p = U'(F_1, F_2, \dots, F_n) - \sum_{i=1}^n F_i \Delta_i \quad (7-37)$$

其中, Δ_i 为与广义力 F_i 相对应的广义位移。由最小总余能原理, 有

$$\delta E'_p = 0 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial E'_p}{\partial F_i} \delta F_i$$

由于变分 δF_i 的独立性, 则得 n 个独立的方程

$$\frac{\partial E'_p}{\partial F_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (7-38)$$

于是,由式(7-37),得

$$\Delta_i = \frac{\partial U'}{\partial F_i} \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (7-39)$$

式(7-39)即卡氏第二定理。



Castigliano, A. (1847—1884)

卡斯蒂利亚诺 (Castigliano, A.), 1847年11月生于意大利米兰,1884年10月在米兰逝世。卡斯蒂利亚诺是一位优秀的结构工程师。起初他用能量法研究结构的计算,他的全部精力都放在研究工作中,著名的卡氏定理是他首先给出的。可惜劳累过度,英年早逝。

例 7-3 用卡氏第二定理求图 7-6 所示简单拉伸杆的伸长。

解:对简单拉伸杆,有

$$\sigma_x = \frac{F}{A}, \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$U'_0 = \int_0^{\sigma_x} \varepsilon_x d\sigma_x = \int_0^{\sigma_x} \frac{\sigma_x}{E} d\sigma_x = \frac{\sigma_x^2}{2E} = \frac{F^2}{2A^2E}$$

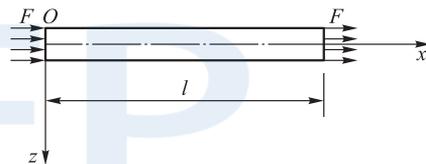


图 7-6

总余能

$$U'(F) = \int_V U'_0 dV = \frac{F^2}{2A^2E} \cdot AL = \frac{l}{2AE} F^2$$

由卡氏第二定理

$$\Delta_i = \frac{\partial U'}{\partial F_i}$$

得杆的伸长为

$$\Delta = \frac{\partial U'}{\partial F} = \frac{lF}{AE}$$

§ 7-6 利用位移变分原理的近似解法

上述几种能量原理可分为三种类型:虚位移原理和最小总势能原理属于位移变分原理^①;虚应力原理和最小总余能原理属于应力变分原理;还有所谓混合型的一般变分原理。本节讨论利用位移变分原理的近似解法。

当给定面力和几何约束条件时,可以利用位移变分原理来求解。此时,应力边界条件与位移边界条件为已知,但根据虚位移原理或最小势能原理,其变分方程(7-13)和(7-20)均等价于平衡方程和应力边界条件,故如采用式(7-13)或式(7-20)求解,则选取的位移函数,无须预先满足应力边界条件,而只须满足位移边界条件。如选取位移函数为

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + \sum_{k=1}^n a_k u_k(x, y, z) \\ v &= v_0 + \sum_{k=1}^n b_k v_k(x, y, z) \\ w &= w_0 + \sum_{k=1}^n c_k w_k(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (7-40)$$

式中, a_k, b_k, c_k 为未知待定的任意常数, u_0, v_0, w_0 满足位移边界条件,即

$$u_0 = \bar{u}, \quad v_0 = \bar{v}, \quad w_0 = \bar{w} \quad (\text{在 } S_u \text{ 上})$$

而 $u_k, v_k, w_k (k=1, 2, \dots, n)$ 为坐标的线性独立的设定函数,且满足

$$u_k = v_k = w_k = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (\text{在 } S_u \text{ 上})$$

这样不论系数 n 如何取值,位移函数总能满足位移边界条件。

对位移取一阶变分时,只须对系数 a_k, b_k, c_k 取一阶变分,即

$$\delta u = \sum_{k=1}^n \delta a_k u_k, \quad \delta v = \sum_{k=1}^n \delta b_k v_k, \quad \delta w = \sum_{k=1}^n \delta c_k w_k$$

将式(7-40)代入虚位移原理的变分方程式(7-13)或代入最小势能原理的变分方程式(7-20),由 $\delta a_k, \delta b_k, \delta c_k$ 的任意性,都可得到用以确定全部系数的线性代数方程组。

例如,将式(7-40)代入式(7-20),可得

$$-\sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{\partial U_0}{\partial a_k} \delta a_k + \frac{\partial U_0}{\partial b_k} \delta b_k + \frac{\partial U_0}{\partial c_k} \delta c_k \right) + \iiint_V \delta a_k u_k F_{bx} dV + \right.$$

^① 参见有关文献,例如参考文献[16]。

$$\iiint_V \delta b_k v_k F_{by} dV + \iiint_V \delta c_k w_k F_{bz} dV + \iint_{S_\sigma} \delta a_k u_k \bar{p}_x dS + \iint_{S_\sigma} \delta b_k v_k \bar{p}_y dS + \iint_{S_\sigma} \delta c_k w_k \bar{p}_z dS = 0$$

计及 $\delta a_k, \delta b_k, \delta c_k$ 的任意性, 整理后得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U_0}{\partial a_k} &= \iiint_V u_k F_{bx} dV + \iint_{S_\sigma} u_k \bar{p}_x dS \\ \frac{\partial U_0}{\partial b_k} &= \iiint_V v_k F_{by} dV + \iint_{S_\sigma} v_k \bar{p}_y dS \\ \frac{\partial U_0}{\partial c_k} &= \iiint_V w_k F_{bz} dV + \iint_{S_\sigma} w_k \bar{p}_z dS \end{aligned} \right\} \quad (7-41)$$

上式(7-41)中, U_0 为应变能函数, 对线弹性材料, 则是 a_k, b_k, c_k 的二次函数。因而式(7-41)为系数 a_k, b_k, c_k 的线性代数方程组。方程的个数为 $3n$, 与未知数的个数相等, 故可由式(7-41)确定全部系数 a_k, b_k 和 c_k , 从而由式(7-40)可求出位移分量。式(7-41)或写成下列形式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U_0}{\partial a_k} &= 0 \\ \frac{\partial U_0}{\partial b_k} &= 0 \\ \frac{\partial U_0}{\partial c_k} &= 0 \end{aligned} \right\} (k=1, 2, \dots, n) \quad (7-41')$$

这一方法称为里茨(Ritz, W.)法。

适当地选择函数 u_0, v_0, w_0 和 u_k, v_k, w_k , 以及项数 n , 可以得到精确度较高的位移解。如将求得的位移解, 代入用位移表示的应力表达式(5-6), 即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \frac{\partial u_k}{\partial x} + b_k \frac{\partial v_k}{\partial y} + c_k \frac{\partial w_k}{\partial z} \right) \right] \right\} \\ \sigma_y &= \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (7-42)$$

由此即可求出对应的应力分量的近似解。

通常近似解的精度往往因取导数而降低, 所以应力近似解的精度一般都较

差。这是因为,应力分量并不精确地满足平衡方程,而是只满足了平衡方程与一个加权函数 u_i 乘积的积分为零的条件

$$\delta \left[\int_V (\sigma_{ij,j} + F_{bi}) u_i dV - \int_{S_\sigma} (\sigma_{ij} n_j - \bar{p}_i) u_i dS \right] = 0 \quad (a)$$

为了提高精度,可增加式(7-40)中的总和号下的项数。当 $n \rightarrow \infty$ 则解应趋于精确解。

[标注 7-7:
对式(a)的
说明]

现在讨论另一种方法。

如选取位移函数时,使其不仅满足位移边界条件,而且也满足应力边界条件,则变分方程(7-13)或(7-20)为

$$\delta U = \delta W \quad (7-43)$$

其中

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV = \int_S \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS - \int_V \sigma_{ij,j} \delta u_i dV \\ \delta W &= \int_V F_{bi} \delta u_i dV + \int_S \bar{p}_i \delta u_i dS \end{aligned}$$

由于 $\bar{p}_i = \sigma_{ij} n_j$ (在 S_σ 上), $\delta u_i = 0$ (在 S_u 上), 得

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + F_{bi}) \delta u_i dV = 0 \quad (7-44)$$

即

$$\iiint_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_{bx} \right) \delta u + (\dots) \delta v + (\dots) \delta w \right] dV = 0 \quad (7-44')$$

注意到

$$\delta u_i = \sum_{k=1}^n \delta a_{ik} u_{ik} \quad (\delta u_i = \delta u, \delta v, \delta w)$$

即

$$\iiint_V (\sigma_{ij,j} + F_{bi}) \sum_{k=1}^n \delta a_{ik} u_{ik} dV = 0 \quad (7-45)$$

$$(i=1,2,3; \quad a_{ik}=a_k, b_k, c_k; \quad u_{ik}=u_k, v_k, w_k)$$

此式展开为 3 个方程,则每个含有 n 个积分,其中 δa_{ik} 为任意值,故如该式成立,则只有每个积分都等于零。

注意到 δa_{ik} 与 x, y, z 无关,可放在积分号外,并考虑到 δa_{ik} 的独立性和任意性,故有

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + F_{bi}) u_{ik} dV = 0 \quad (i \text{ 不求和}) \quad (7-46)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_V \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_{bx} \right) u_k dV &= 0 \\ \int_V \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_{by} \right) v_k dV &= 0 \\ \int_V \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_{bz} \right) w_k dV &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7-46')$$

$$(k=1, 2, \dots, n)$$

在上式中,各应力分量可用位移分量表示。由于位移分量是系数 a_k, b_k, c_k 的线性函数,故式(7-46)为该系数的线性方程组。求解之后,代入式(7-40),便可求得各位移分量。这一方法称为伽辽金(Galerkin, B. G.)法。



Ritz, W. (1878—1909)

里茨(Ritz, W.), 1878年2月生于瑞士, 他的父亲是一位著名的艺术家。1897年进入苏黎世技术学校学习工程学科。他和爱因斯坦是同班同学, 数学物理都学得很好。后来致力于数理问题计算方法的研究, 里茨法就是他的杰作。但1904年开始健康状况不好, 停止了研究工作。1909年2月英年早逝。



Galerkin, B.G. (1871—1945)

伽辽金(Galerkin, B.G.), 1871年2月生于白俄罗斯明斯克, 1908年开始在圣彼得堡理工学院任教, 1915年 Galerkin 发表了解微分方程的近似解方法, 即所谓 Galerkin 方法。1923年任圣彼得堡理工学院土木工程学院院长。1934年获技术科学和数理科学两个博士学位, 1936年当选为苏联科学院院士。曾被授予中将军衔。后来健康逐渐恶化, 于1945年7月二战胜利前夕在莫斯科逝世, 享年74岁。

例 7-4 设有长度为 l 的简支梁,受均布荷载 q 作用,试求梁的挠度 $v(x)$ (图 7-7a)。

解:

1) 用里茨法。

① 假定位移函数为

$$v(x) = c_1 x(l-x) + c_2 x^2(l^2 - x^2) + \dots \quad (a)$$

显然,上式(a)满足边界条件

$$v(0) = v(l) = 0$$

今仅取式(a)的第一项,则由最小势能原理有

$$\begin{aligned} E_p &= U - W \\ &= \int_0^l \left[\frac{EI}{2} \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 - qv \right] dx \\ &= \int_0^l \frac{EI}{2} [(-2c_1)^2 - c_1 qx(l-x)] dx \end{aligned}$$

由

$$\frac{\partial E_p}{\partial c_1} = 0$$

可得

$$c_1 = \frac{ql^2}{24EI}$$

将 c_1 代入式(a),得梁的挠度为

$$v = \frac{ql^4}{24EI} \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right)$$

其跨中的最大挠度为

$$v_{\max} = \frac{ql^4}{96EI}$$

初等理论解为

$$\bar{v}_{\max} = \frac{ql^4}{76.8EI} \quad (7-47)$$

可见,误差为 17%。如取式(a)的前两项,

则可得 $c_1 = \frac{ql^2}{24EI}, c_2 = \frac{q}{24EI}$, 于是有

$$v = \frac{ql^2 x}{24EI} (l-x) + \frac{qx^2}{24EI} (l-x)^2 \quad (c)$$

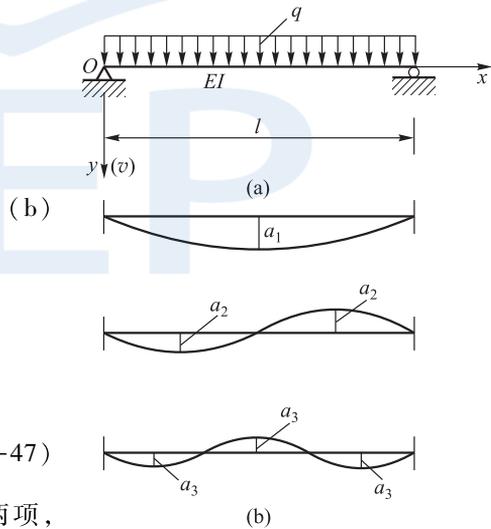


图 7-7

上式(c)给出的最大位移与初等理论的解相等。

② 再假定位移函数为下列三角级数

$$v = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \cdots + a_n \sin \frac{n\pi x}{l} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (d)$$

其中 a_n 为待定系数, 即梁的挠度曲线将由一组正弦曲线叠加而成(图 7-7b)。

此时, 最小势能原理的总势能 E_p 仍为

$$E_p = \int_0^l \frac{EI}{2} \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^l qv dx \quad (e)$$

而其中等号右边第一项的被积函数为

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -a_1 \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} - 4a_2 \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{2\pi x}{l} - 9a_3 \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{3\pi x}{l} - \cdots = - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

将上式代入式(e), 并注意到

$$\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}$$

$$\int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = 0 \quad (m \neq n)$$

得

$$E_p = \frac{EI\pi^4}{4l^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_n^2 - \frac{2ql}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{a_n}{n} \quad (7-48)$$

根据里茨法, 有

$$\frac{\partial E_p}{\partial a_n} = 0 \quad (f)$$

当 n 为奇数时, 有

$$\frac{2EI\pi^4}{4l^3} n^4 a_n - \frac{2ql}{n\pi} = 0$$

当 n 为偶数时, 有

$$\frac{2EI\pi^4}{4l^3} n^4 a_n = 0$$

由此, n 为奇数时, 得

$$a_n = \frac{4ql^4}{EI n^5 \pi^5}$$

n 为偶数时, 得

$$a_n = 0$$

于是, 梁的挠曲线可写为

$$v = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (7-49)$$



级数式(7-49)收敛很快,一般地说,取前两项即已足够精确。

梁中点处的最大挠度为

$$v_{\max} = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \left(1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} \dots \right)$$

[标注 7-8:
级数解的
精确性]

当取级数的第一项时,有

$$v_{\max} = \frac{ql^4}{76.6EI}$$



与初等理论的解 \bar{v}_{\max} 相比,误差为 0.26%。

2) 用伽辽金法

[标注 7-9:
对简支端位
移边界条件
的说明]

用伽辽金法解题,要求设定位移函数既满足位移边界条件又满足力的边界条件。在这种情况下,位移边界条件为

$$v \Big|_{\substack{x=0 \\ x=l}} = 0$$

力的边界条件为

$$v'' \Big|_{\substack{x=0 \\ x=l}} = 0$$

① 首先考虑多项式形式的位移函数。

由于一次、二次多项式不满足位移和力的边界条件,三次多项式不满足对称性要求,故选取下列四次多项式

$$v = a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 \quad (g)$$

于是

$$v'' = 12a_1x^2 + 6a_2x + 2a_3$$

由 $x=0, v=v''=0$, 得

$$a_3 = a_5 = 0$$

由 $x=l, v=v''=0$, 得

$$a_2 = -2a_1l, \quad a_4 = a_1l^3$$

由此得

$$v = a_1(x^4 - 2lx^3 + l^3x) \quad (h)$$

此时式(7-46)化为

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + F_{by} \right) v_k dV = 0$$

即

$$\int_0^l \left(\frac{\partial F_{s_x}}{\partial x} + q \right) v_k dx = 0 \quad (i)$$

此处 $v_k = x^4 - 2lx^3 + l^3x$, 于是有

$$\int_0^l (-EIv^{(4)} + q)(x^4 - 2lx^3 + l^3x) dx = 0 \quad (j)$$

即有

$$\begin{aligned} EIv^{(4)} &= q \\ EI \cdot 24a_1 &= q \end{aligned}$$

由此得 $a_1 = q/24EI$, 及

$$v = \frac{q}{24EI}(x^4 - 2lx^3 + l^3x) \quad (k)$$

此解正好与初等理论的解相同。

② 取位移函数为三角级数

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin \frac{i\pi x}{l} \quad (l)$$

显然, 此函数能满足全部边界条件

$$v(0) = v''(0) = v(l) = v''(l) = 0$$

此时式(i)化为

$$\int_0^l EI \left[\sum_{i=1}^{\infty} a_i \left(-\frac{i\pi}{l} \right)^4 \sin \frac{i\pi x}{l} \right] \sin \frac{i\pi x}{l} dx + \int_0^l q \sin \frac{i\pi x}{l} dx = 0$$

注意到三角函数的正交性, 上式化为

$$-EIa_i \left(\frac{i\pi}{l} \right)^4 \cdot \frac{1}{2} \left(q \frac{l}{i\pi} \cos \frac{i\pi x}{l} \right) \Big|_0^l = 0$$

由此可得

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{4ql^4}{EI(i\pi)^5} \\ v &= \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{i^5} \sin \frac{i\pi x}{l} \end{aligned}$$

这一结果与里茨法结果相同。但在计算过程中可以不必计算结构的总势能, 而直接由平衡方程开始, 较为简便。

§ 7-7 利用应力变分原理的近似解法

如前所述, 利用虚应力原理和最小总余能原理来求弹性力学问题的近似解



[标注 7-10:
由式(i)到式
(j)的推导]

时,要以应力分量作为独立变量进行变分,所选的应力场,必须是静力许可的应力场,即满足平衡方程和应力边界条件,而变形协调条件则无须预先满足,在求解具体问题时,可能会碰到两种边值问题:一种是给定面力,一种是给定位移。当给定面力时,则将 $\delta p_x = \delta p_y = \delta p_z = 0$ 代入变分方程;如给定位移,则应力的变分应满足式(7-23),再由式(7-25)求出 $\delta p_x, \delta p_y, \delta p_z$ 之后代入应力变分方程进行计算。在此情况下,仍可用里茨法或伽辽金法求近似解。

如取应力分量为下列多项式:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^0 + \sum_m A_m \sigma_x^m \\ \sigma_y &= \sigma_y^0 + \sum_m A_m \sigma_y^m \\ \dots\dots\dots \\ \tau_{zx} &= \tau_{zx}^0 + \sum_m A_m \tau_{zx}^m \end{aligned} \right\} \quad (7-50)$$

其中 $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \dots, \tau_{zx}^0$ 是选定的满足平衡方程和应力边界条件的函数, $\sigma_x^m, \sigma_y^m, \dots, \tau_{zx}^m$ 是选定的满足体力为零的平衡方程及面力为零的应力边界条件的函数,这样,不管系数 A_m 如何取值时,式(7-50)的 $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{zx}$ 总能满足平衡方程和应力边界条件。

如前所述,对式(7-50)中应力分量的变分,只有用对系数 A_m 的变分来实现,而 $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \dots, \tau_{zx}^0$ 及 $\sigma_x^m, \sigma_y^m, \dots, \tau_{zx}^m$ 等,则只是给定的坐标 x, y, z 的函数,与应力的变分无关,即

$$\left. \begin{aligned} \delta \sigma_x &= \sum \sigma_x^m \delta A_m \\ \delta \sigma_y &= \sum \sigma_y^m \delta A_m \\ \dots\dots\dots \\ \delta \tau_{zx} &= \sum \tau_{zx}^m \delta A_m \end{aligned} \right\} \quad (7-51)$$

于是,当全部表面上给定面力时,由最小功定理,有

$$\delta U' = 0$$

$$\delta U' = \frac{\partial U'}{\partial A_1} \delta A_1 + \frac{\partial U'}{\partial A_2} \delta A_2 + \dots + \frac{\partial U'}{\partial A_m} \delta A_m = 0$$

由 $\delta A_1, \delta A_2, \dots, \delta A_m$ 任意性,可得

$$\frac{\partial U'}{\partial A_1} = 0, \quad \frac{\partial U'}{\partial A_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial U'}{\partial A_m} = 0 \quad (7-52)$$

从而得出关于常数 A_m 的线性代数方程组。由此,容易得出 A_1, A_2, \dots, A_m 。

如给定位移边界条件,则由 $\delta E'_p = 0$, 可得

$$\delta U' = \iint_{S_u} (\bar{u} \delta p_x + \bar{v} \delta p_y + \bar{w} \delta p_z) dS \quad (\text{a})$$

在式(a)等号右边, \bar{u} , \bar{v} 和 \bar{w} 为已知, 则由式(7-51)及 $\delta \sigma_{ij} n_j = \delta p_i$, 可求得

$$\iint_{S_u} (\bar{u} \delta p_x + \bar{v} \delta p_y + \bar{w} \delta p_z) dS = \sum_m D_m \delta A_m \quad (\text{b})$$

其中 D_m 为常数; 另一方面

$$\delta U' = \sum_m \frac{\partial U'}{\partial A_m} \delta A_m \quad (\text{c})$$

于是, 将式(b), (c)代入式(a), 并注意到 δA_m 的任意性, 得

$$\frac{\partial U'}{\partial A_m} = D_m \quad (7-53)$$

式(7-53)仍为线性代数方程组。

由以上讨论可知, 应用应力变分原理时, 选定的应力场要满足平衡方程和应力边界条件的要求, 往往是不易做到的。但是, 对于某些问题, 应力分量是用应力函数表示的, 而应力函数表示的应力分量总能满足平衡方程。这样, 我们选定应力函数的表达式, 使其给出的应力分量满足边界条件, 困难就减少了, 从而可扩大应力变分原理的用途。

§ 7-8 有限元法

解弹性力学问题本质上是求解偏微分方程边值问题。由于问题的复杂性, 人们往往采取各种近似方法或渐近方法来求解。有限差分法就是用差分方程逼近所研究问题的微分方程的近似方法。在这里用有限差分关系式代替导数, 就可以用代数方程来近似表示微分方程, 以便于使用近代计算手段进行数值求解。本节将介绍有限元法, 它是应用更加广泛的一种数值算法, 这种方法可以十分方便地用电子计算机实现。目前, 已有多种有效的功能齐全的计算软件可供使用。

本节将从变分原理引出有限元法的基本概念。在前面讨论的变分方法中, 实际上是把求解弹性微分方程边值问题化为求某一泛函近似最小的问题。例如, 在最小总势能原理中, 变分方程(7-20)除了满足给定几何边界条件外, 它完全等价于平衡方程与应力边界条件。就是说, 用最小势能原理和用泛定方程求解边值问题只是形式上的不同。

物体的总势能为:



[标注 7-11:
对式(b)的
说明]

$$E_p = \int_V \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} c_{ijkl} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl} - F_i u_i \right) dV - \int_{S_\sigma} p_i u_i dS \quad (7-54)$$

为了以后讨论方便,将应力矢量、应变矢量、位移矢量等均用矩阵符号表示,即

$$E_p = \int_V \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{u}^T \mathbf{F} \right) dV - \int_{S_\sigma} \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS \quad (7-55)$$

以下,把体积域分成有限个单元,并把上式写成

$$E_p = \sum_{i=1}^m E_{pi} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (7-56)$$

其中 m 为所分割成的单元数,而

$$E_{pi} = \int_{V_i} \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{u}^T \mathbf{F} \right] dV - \int_{(S_\sigma)_i} \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS \quad (7-57)$$

此处 $V_i, (S_\sigma)_i$ 分别表示第 i 个单元的区域和它上的应力边界那一部分。显然,若物体的位移场是连续的,则一个单元的 \mathbf{u} , 与所有相邻单元在它们公共边界上的值是相同的。所以式(7-57)就和式(7-55)形式相似,是第 i 个单元的势能。就是说,物体整体的总势能可以用 m 个单元体的势能的总和来计算。这就是说,有限元法的理论根据就是最小总势能原理。同样地,也可从最小总余能原理,乃至广义变分原理等都可导出各种类型的有限元法。以下,将以最小总势能原理来说明有限元法的概念。有兴趣的读者可参阅专门的有限元法著作(参考文献[24])。

现以平面问题为例给出有限元法的基本思路。设有一给定形状和所占区域的平面应力问题,现将其划分为若干个三角形单元,取出其中第 i 个单元,它的3个顶点分别为 l, m, n (图7-8)。三角形的顶点称为节点,我们将设法将三角形内部的值用节点上的值表示。最简便的办法是选用线性插值函数,目的是使得沿三角形任一边上位移的变化都是线性的。于是,由于节点上的位移相等,所以边界上的位移也必然相等。

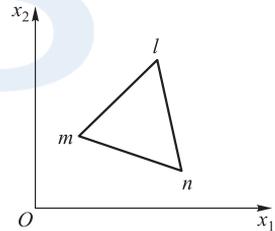


图 7-8

单元的每一个节点的位移有 2 个分量,例如对于节点 l 有

$$(u_i^l) = \begin{pmatrix} u_1^l \\ u_2^l \end{pmatrix} \quad (7-58)$$

而该单元 i 的 3 个节点的 6 个位移分量可表示成

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_i^l \\ u_i^m \\ u_i^n \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2) \quad (7-59)$$

i 单元内部任一点的位移 u_i 可由节点位移 \mathbf{u} 唯一确定

$$(u_i) = \mathbf{A}\mathbf{u} \quad (7-60)$$

其中矩阵 \mathbf{A} 中的元素是该点坐标 x_j 的函数。

选取这一函数要考虑到,将相应节点坐标代入后可以得到该节点的位移,并能保证相邻单元边界上位移的连续性。为此,选取 x_j 的线性函数

$$u_i = \alpha_i + \beta_{ij}x_j \quad (j = 1, 2) \quad (7-61)$$

其中 α_i 和 β_{ij} 在单元 i 中保持常数,上式(7-61)在 3 个节点处的展开形式为

$$\left. \begin{aligned} u_i^l &= \alpha_i + \beta_{i1}x_1^l + \beta_{i2}x_2^l \\ u_i^m &= \alpha_i + \beta_{i1}x_1^m + \beta_{i2}x_2^m \\ u_i^n &= \alpha_i + \beta_{i1}x_1^n + \beta_{i2}x_2^n \end{aligned} \right\} (i = 1, 2) \quad (7-62)$$

考虑到三角形的面积为

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1^l & x_2^l \\ 1 & x_1^m & x_2^m \\ 1 & x_1^n & x_2^n \end{vmatrix}$$

则可得有限单元 i 中任意点的位移分量为

$$u_i = \frac{1}{2S_{\Delta}} [(a^l + b^l x_1 + c^l x_2)u_i^l + (a^m + b^m x_1 + c^m x_2)u_i^m + (a^n + b^n x_1 + c^n x_2)u_i^n] \quad (7-63)$$

其中

$$a^l = x_1^m x_2^n - x_1^n x_2^m, \quad b^l = x_2^m - x_2^n, \quad c^l = x_1^n - x_1^m$$

其余系数可由循环置换角标 l, m, n 而得到。

求出单元所有点上的位移后,便不难确定应变分量

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (7-64)$$

或

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (7-65)$$



[标注 7-12:
对 \mathbf{B} 矩阵的
说明]

在平面应力情况下,有

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (7-66)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (7-67)$$

在平面应变情况下,只须按前述规则代换弹性常数 ν 和 λ 即可。此外,不难给出下列关系式

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (7-68)$$

此处 \mathbf{D} 称为应力矩阵,即

$$\mathbf{D} = \mathbf{C}\mathbf{B} = \frac{E}{2S_{\Delta}(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} b^l & \nu c^l & b^m & \nu c^m & b^n & \nu c^n \\ \nu b^l & c^l & \nu b^m & c^m & \nu b^n & c^n \\ \frac{1-\nu}{2} c^l & \frac{1-\nu}{2} b^l & \frac{1-\nu}{2} c^m & \frac{1-\nu}{2} b^m & \frac{1-\nu}{2} c^n & \frac{1-\nu}{2} b^n \end{pmatrix} \quad (7-69)$$

显然,用以上公式所描述的单元的应力、应变状态,可以看成是节点力作用的结果,节点力与单元边界上的应力必须是静力等效的。

节点力可以写成列向量

$$\mathbf{F}_R = \begin{pmatrix} F_{Ri}^l \\ F_{Ri}^m \\ F_{Ri}^n \end{pmatrix} \quad (i=1,2) \quad (7-70)$$

于是 i 单元的势能的一次变分的另一形式为

$$\delta E_{pi} = (\delta \mathbf{u})^T \int_S \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{u} h dx dy - (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{F}_R \quad (7-71)$$

由 $\delta E_{pi} = 0$, 得

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{u} h S_{\Delta} \quad (7-72)$$

其中 S_{Δ} 为单元面积, h 为单元厚度。上式即

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{K}_0 \mathbf{u} \quad (7-73)$$

其中

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} h S_{\Delta}$$

\mathbf{K}_0 称为单元刚度矩阵,且可写成下列展开的形式

$$\mathbf{K}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_0^{ll} & \mathbf{K}_0^{lm} & \mathbf{K}_0^{ln} \\ \mathbf{K}_0^{ml} & \mathbf{K}_0^{mm} & \mathbf{K}_0^{mn} \\ \mathbf{K}_0^{nl} & \mathbf{K}_0^{nm} & \mathbf{K}_0^{nn} \end{pmatrix} \quad (7-74)$$

此处,每一个子阵均为 2×2 维。例如 \mathbf{K}_0^{lm} 为

$$\mathbf{K}_0^{lm} = \mathbf{B}^{lT} \mathbf{C} \mathbf{B}^m h S_{\Delta} \quad (7-75)$$

现在我们来考虑外力。若作用在物体上的外力为集中力,则在划分单元时,应使这些力作用在单元网格的节点上。若外力为分布力,则应以静力等效集中力来代替。这样,节点上的外力矢量为 \mathbf{F} ,其相应位移矢量为 \mathbf{u} ,则有

$$\delta E_p = (\delta \mathbf{u})^T \int_S \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{u} h dx dy - (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{F} \quad (7-76)$$

由 $\delta E_p = 0$, 得

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (7-77)$$

此处 \mathbf{K} 为总刚度阵,其中任一元素可表示为

$$\mathbf{K}^{rs} = \sum \mathbf{K}_0^{rs}$$

式中的求和号表示在节点 r 和 s 所连接的全部单元上求和。而矩阵 \mathbf{K}_0^{rs} 由式(7-75)求出。

由此可见,有限元法就是当在单元内部给定机动许可的位移场时,寻求使物体的总势能为最小的位移场。从而不难想象到,有限元法与里茨法有相似之处,其差别仅在于选择位移函数上。里茨法中位移函数是用整体范围内的某些参数给出的,而在有限元法中,它是由单元范围内的节点位移给出的。位移函数的任一变更影响的范围差别很大。因而,里茨法仅适用于简单形状的物体,而有限元法,则只须在划分单元时,选用简单的便于分析的单元形状。

下面给出主要计算步骤:

- (1) 将结构离散化,划分单元并编号;
- (2) 写出单元刚度矩阵;
- (3) 形成总体刚度矩阵;
- (4) 移置结构荷载;
- (5) 引入支承条件;
- (6) 解总体平衡方程组;
- (7) 计算结果整理。

本章复习要点

1. 单位体积的应变能为

$$U_0 = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

而单位体积的应变余能(又称为应力能)为

$$U'_0 = \int_0^{\sigma_{ij}} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij}$$

两者之间的关系为:

- (1) 应变能与应变余能是互补的;
 - (2) 在线弹性时两者相等。
2. 虚位移原理可表示为:物体平衡的充要条件是,对于任一微小虚位移,有

$$\delta U = \delta W$$

与虚应力原理的表述和含义不同。

3. 最小总势能原理与最小总余能原理的表述:

$$\delta E_p = 0, \quad \delta E'_p = 0$$

4. 由最小总势能原理导出的卡氏第一定理:

$$F_i = \frac{\partial U}{\partial \Delta_i}$$

由最小总余能原理导出的卡氏第二定理:

$$\Delta_i = \frac{\partial U'}{\partial F_i}$$

5. 里茨法与伽辽金法都是基于最小总势能原理的近似解法。

6. 有限元法可以认为是变分原理的近似解法,其精确度随着离散化后的网格增密而提高。

思 考 题

- 7-1 虚位移和虚应力是什么含义?
- 7-2 虚位移原理为什么和材料性质无关?
- 7-3 为什么说最小总势能原理等价于平衡方程和应力边界条件?
- 7-4 用最小总余能原理求得应力的近似解后,能否由此求出位移分量?为什么?
- 7-5 里茨法与伽辽金法的近似性表现在哪里?
- 7-6 如果弹性体处于运动状态,则由达朗贝尔(d'Alembert, J. le R.)原理,能否建立起一个弹性体运动的变分方程[称为哈密顿(Hamilton, W. R.)变分原理]?

习 题

- 7-1 试证:

$$\iiint_V \frac{1}{2} \sigma_{ij} (u_{i,j} + u_{j,i}) dV = \int_S \sigma_{ij} n_j u_i dS - \iiint_V \sigma_{ij,j} u_i dV$$

7-2 试证明虚位移与虚应力原理是下列高斯散度定理的特殊情况：

$$\iiint_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \iiint_V F_{in} u_i dV + \int_{S_\sigma} p_i u_i dS + \int_{S_u} p_i u_i dS$$

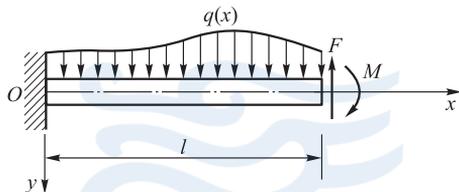
7-3 试证明图示悬臂梁的应变能公式为

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI (w'')^2 dx$$

及

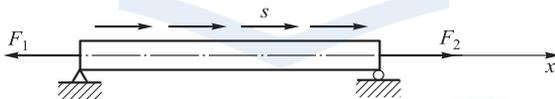
$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^l EI (w'')^2 dx - \int_0^l q(x) w dx - Mw'(l) + Fw(l)$$

并说明其附加条件。



题 7-3 图

7-4 试给出图示结构的余能表达式。



题 7-4 图

7-5 试用卡氏第二定理求图示三杆桁架中 A 点的位移。

答案： $\Delta = \frac{Fl}{AE(1+2\cos^3\alpha)}$ 。

7-6 试给出极坐标系下平面应力状态的应变能表达式。

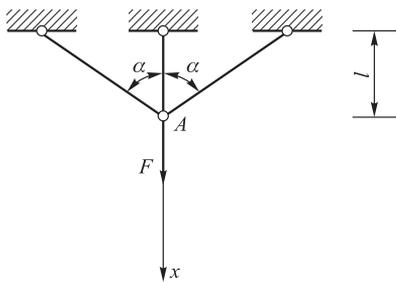
答案： $U_0(\varepsilon_{ij}) = \frac{E}{2(1-\nu^2)} [\varepsilon_\rho^3 + \varepsilon_\varphi^2 + 2\nu\varepsilon_\rho\varepsilon_\varphi + (1-\nu)\gamma_{\rho\varphi}^2]$

7-7 设有图示悬臂梁右端受 F 作用，如取挠曲线为

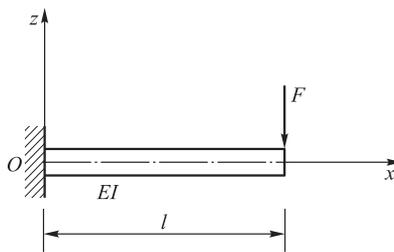
$$w = ax^2 + bx^3$$

试求 a, b 的值。

答案： $a = \frac{Fl}{2EI}, b = -\frac{F}{6EI}$ 。



题 7-5 图



题 7-7 图



第八章 柱体的扭转

§ 8-1 问题的提出 基本关系式

本章研究弹性柱体的扭转问题。这类问题在航空、土建及机械工程中是常见的。所谓柱体的扭转,是指圆柱体和棱柱体只在端部受到扭矩的作用,且扭矩矢量与柱体的轴线 z 的方向相重合。

圆形截面柱体的扭转,在材料力学课程中已经进行过讨论。其特点是扭转变形前后的截面都是圆形(图 8-1),而且每一个截面只作刚体转动,在小变形条件下,没有轴向位移,即 $w(x, y, z) = 0$ 。这样,变形后,截面的半径及柱体长度基本不变。

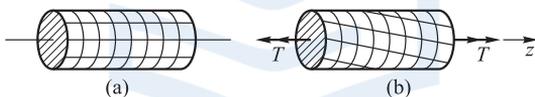


图 8-1

非圆形截面柱体的情况要复杂得多。由于截面的非轴对称形式,在扭转过程中,截面不再保持为平面,而发生了垂直于截面的翘曲变形,即 $w(x, y, z) \neq 0$ 。函数 $w(x, y, z)$ 称为翘曲函数。图 8-2 为矩形截面柱体的扭转示意图。本章主要讨论棱柱体的扭转问题。

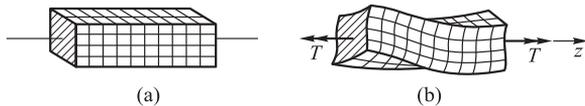


图 8-2

以下以截面为任意形状的柱体扭转为例,写出扭转问题的基本方程式。设有任意的等截面柱体,受扭矩 T 作用,如图 8-3 所示。

为了求解扭转问题,要适当选取坐标系,对于有两个对称轴的截面,坐标原点应选在两个对称轴的交点,即对称中心处。对于扭转问题,柱体的侧面为自由

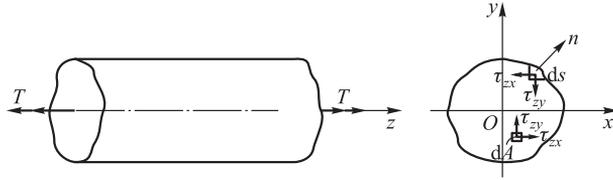


图 8-3

表面,其边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x l + \tau_{xy} m &= 0 \\ \tau_{xy} l + \sigma_y m &= 0 \\ \tau_{zx} l + \tau_{yz} m &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8-1)$$

其中, $l = \cos(n, x)$, $m = \cos(n, y)$ 。在端部有

$$\left. \begin{aligned} \iint \tau_{zx} dA &= 0 \\ \iint \tau_{zy} dA &= 0 \\ \iint \sigma_z dA &= 0 \\ \iint \sigma_z x dA &= 0 \\ \iint \sigma_z y dA &= 0 \\ \iint (\tau_{zy}^x - \tau_{zx}^y) dA &= T \end{aligned} \right\} \quad (8-2)$$

根据圣维南半逆解法所作的假定,认为截面的翘曲变形与 z 无关,即各截面的翘曲都一样。这就是说,翘曲函数 w 仅为 x, y 的函数,即

$$w = f(x, y) \quad (8-3)$$

此外,假定柱体发生变形后,截面只有绕 z 轴的刚体转动,并且单位长度的扭转角 φ 是一个常数。

若截面上距扭转中心 A 为 ρ 的任一点 $P(x, y)$ 扭转后移到 $P'(x-u, y+v)$ (图 8-4),且 $z=0$ 平面没有转动只有翘曲, P 点位移的 x, y 方向的分量为

$$\left. \begin{aligned} u &= -(\rho\varphi z) \sin \alpha = -y\varphi z \\ v &= (\rho\varphi z) \cos \alpha = x\varphi z \end{aligned} \right\} \quad (8-4)$$

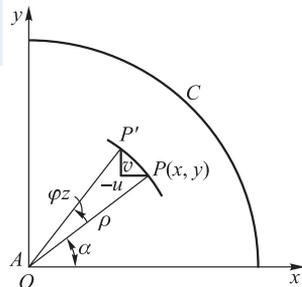


图 8-4

其中 α 为 AP 与 x 轴所成的角。由于截面总扭转角与该截面到坐标原点的距离成正比,故 AP 的转角为 φ_z 。将式(8-3)、式(8-4)代入应变位移关系式后,得

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x = \gamma_{xy} = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0 \\ \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} - y\varphi \\ \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + x\varphi \end{aligned} \right\} \quad (8-5)$$

由广义胡克定律,化为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{zx} = G \left(\frac{\partial w}{\partial x} - y\varphi \right) = G\gamma_{zx} \\ \tau_{zy} = G \left(\frac{\partial w}{\partial y} + x\varphi \right) = G\gamma_{zy} \end{aligned} \right\} \quad (8-6)$$

平衡方程(不计体力)化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8-7)$$

将式(8-6)中 τ_{zx} 的表达式对 y 微分, τ_{zy} 的表达式对 x 微分后相减,可得用应力表示的应变协调方程,即

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} = -2G\varphi \quad (8-8)$$

于是,任意形状截面的柱体扭转时的应力,可根据边界条件由式(8-7)和式(8-8)求得。

上述问题的解,可采用应力函数法。为此,如取一个函数 $\psi(x, y)$, 使得

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (8-9)$$

此处 ψ 称为普朗特(Prandtl, L.)应力函数,显然,式(8-9)满足平衡方程。而应变协调方程(8-8)化为

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2G\varphi \quad (8-10)$$



[标注 8-1:
对方程(8-8)
的说明]

由此得出,应力函数 ψ 应当满足上述偏微分方程(8-10),这种形式的方程称为泊松方程。

考虑到式(8-6),侧面边界条件式(8-1)简化为

$$\tau_{zx}l + \tau_{zy}m = 0 \quad (8-11)$$

侧面外法线方向余弦

$$\left. \begin{aligned} l = \cos(n, x) &= \frac{dy}{ds} \\ m = \cos(n, y) &= -\frac{dx}{ds} \end{aligned} \right\} \quad (8-12)$$

其中 $x=x(s)$, $y=y(s)$, 并且在图 8-3 所示的微元中 s 增加时 y 增加, 而 x 减少。故在 dx, dy 前冠以正负号来表示这种关系。将式(8-9)和式(8-12)代入式(8-11)得出在边界上应有

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{d\psi}{ds} = 0 \quad (8-13)$$

或

$$\psi = \text{常数}$$

上式说明,沿柱体任意的边界曲线,应力函数 $\psi(x, y)$ 为一任意常数。因为此问题只限于 ψ 的一阶导数,即切应力分量,所以,将常数取为零无损于一般性,即有

$$\psi = 0 \quad (\text{沿周边 } C) \quad (8-14)$$

而任一点的切应力为

$$\tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2} \quad (8-15)$$

或

$$\tau = |\text{grad } \psi|$$

或

$$\tau = \frac{\partial\psi}{\partial n}$$

此处 n 为 $\psi(x, y)$ 等值线的法线方向, τ 的方向为沿 $\psi(x, y)$ 等值线的切线方向, 因而 $\psi(x, y)$ 等值线也称切应力线。结合式(8-14)可知边界上切应力方向必须与边界的切线一致, 故周界线 C 本身也是一条切应力线。

对于给定的 φ 值, 不难由方程(8-10)和(8-14)唯一地确定应力函数 ψ 。从而由式(8-9)求出应力, 从式(8-6)求出应变, 以及翘曲函数 f 。但我们注意到, 由式(8-6)和式(8-9), 有

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{G} \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$\gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{G} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

当通过积分来求位移函数和翘曲函数时,所得结果中,总含有表示刚体位移的积分常数。所以,位移函数和翘曲函数可准确到一个附加常数的范围内。

按上述方法求得的应力分布还应满足端部条件,即

$$T = \iint_A (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dx dy$$

$$= - \iint_A x \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dy - \iint_A y \frac{\partial \psi}{\partial y} dx dy$$

$$= - \int dy \int x \frac{\partial \psi}{\partial x} dx - \int dx \int y \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$$

其中 A 为截面面积。上式分部积分后,得

$$T = - \int dy x \psi \Big|_{x_1}^{x_2} + \iint \psi dx dy - \int dx y \psi \Big|_{y_1}^{y_2} + \iint \psi dx dy$$

因在边界上 $\psi = 0$, x_1, x_2, y_1, y_2 为侧面的点。故得

$$T = 2 \iint \psi dx dy \quad (8-16)$$

上式表示,如在截面上每一点有一个 $\psi(x, y)$ 值,则扭矩 T 为 ψ 曲面下所包体积的 2 倍。

由以上讨论得出,如能找到一个函数 ψ 。其在边界上的值为零,在截面内满足方程(8-10),则截面的切应力分布及扭矩就都可求得。

扭矩 T 除以单位长度扭角 φ 得到的因子称为抗扭刚度。抗扭刚度是一个有用的概念,通常记作 K_t 。

§ 8-2 矩形截面柱体的扭转

作为例子,现在来讨论矩形截面柱体的扭转。问题的求解应首先求得应力函数 ψ ,有了函数 ψ 以后,便不难进一步求得切应力 τ_{zx} 、 τ_{zy} 和扭矩 T 。

由以上讨论知道,应力函数 ψ 在矩形区域 $ABCD$ 内(图 8-5)满足泊松方程

$$\nabla^2 \psi = -2G\varphi$$

在边界上,即当 $x = \pm a, y = \pm b$, 有

$$\psi = 0$$

其中 a, b 为截面长和宽的一半(图 8-5)。

由数学物理方程知道,上述问题为泊松方程的第一边值问题,或狄里克雷(Dirichlet, P.G.L.)问题。在该问题的定义域是单连通区域的情况下,这类问题的解可假定有下列形式

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 \quad (8-17)$$

其中 ψ_0 为泊松方程的特解, ψ_1 是相应齐次方程的解,即

$$\nabla^2 \psi_0 = -2G\varphi$$

$$\nabla^2 \psi_1 = 0$$

一旦求得 ψ_0 , 则变为对下列狄里克雷问题的求解:

$$\nabla^2 \psi_1 = 0$$

$$\psi_1 = -\psi_0 \text{ (在边界上)}$$

ψ_0 可取为

$$\psi_0 = -(y^2 - b^2)G\varphi$$

而 ψ_1 为一调和函数, 应满足下列边界条件

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= 0 && \text{(当 } y = \pm b) \\ \psi_1 &= G\varphi(y^2 - b^2) && \text{(当 } x = \pm a) \end{aligned} \right\} \quad (8-18)$$

今取 ψ_1 为下列函数形式

$$\psi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) Y_n(y) \quad (8-19)$$

由

$$\nabla^2 \psi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (X_n'' Y_n + Y_n'' X_n) = 0$$

有

$$X_n'' Y_n = -Y_n'' X_n$$

或写成

$$\frac{X_n''}{X_n} = -\frac{Y_n''}{Y_n}$$

上式等号左边仅为 x 的函数, 右边仅为 y 的函数。故只能等于常数 k_n^2 , 于是有

$$X_n'' = k_n^2 X_n, \quad Y_n'' = -k_n^2 Y_n \quad (8-20)$$

由此可得

$$\left. \begin{aligned} X_n &= C_{1n} \operatorname{sh} k_n x + C_{2n} \operatorname{ch} k_n x \\ Y_n &= C_{3n} \sin k_n y + C_{4n} \cos k_n y \end{aligned} \right\} \quad (8-21)$$

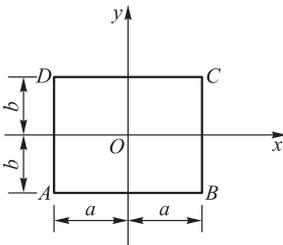


图 8-5

其中 $C_{1n}, C_{2n}, C_{3n}, C_{4n}$ 是应由边界条件来确定的常数。边界条件式(8-18), 在 $x = \pm a$ 上有

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial y} = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) Y'_n(y) = 2G\varphi y \quad (8-22)$$

由上式可以看出, $X_n(x) Y'_n(y)$ 是 y 的奇函数, 所以有 $C_{3n} = 0$, 又由式(8-18)可以看出, $x = \pm a$ 时, 有

$$\psi_1 = G\varphi(y^2 - b^2) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) Y_n(y) \quad (8-23)$$

可见, $X_n(x)$ 是关于 y 轴的对称函数, 由此得 $C_{1n} = 0$, 于是有

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} C_{4n} \cos k_n y C_{2n} \operatorname{ch} k_n x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos k_n y \operatorname{ch} k_n x \end{aligned} \quad (8-24)$$

因 $y = \pm b, \psi_1 = 0$, 故

$$\begin{aligned} \cos k_n b &= 0 \\ k_n &= \frac{n\pi}{2b} \end{aligned}$$

n 为奇数。于是, 得到应力函数 ψ 为

$$\psi = -(y^2 - b^2) G\varphi + \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{2b} \cos \frac{n\pi y}{2b} \quad (8-25)$$

上式第一项按级数展开, 得

$$-(y^2 - b^2) G\varphi = \frac{32b^2}{\pi^3} G\varphi \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi y}{2b}$$

从而有

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{32b^2}{\pi^3} G\varphi \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi y}{2b} + \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi y}{2b} \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{2b} \\ &= \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \cos \frac{n\pi y}{2b} \left(\frac{32b^2 G\varphi}{\pi^3} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^3} + A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{2b} \right) \end{aligned}$$

因 $x = \pm a$ 时, $\psi = 0$, 代入上式, 可得

$$A_n = -\frac{32b^2 G\varphi}{\pi^3} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^3 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}} \quad (8-26)$$

将上式(8-26)代入式(8-25), 得到

$$\psi = -G\varphi \left(y^2 - b^2 + \frac{32b^2}{\pi^3} \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^3 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}} \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{2b} \cos \frac{n\pi y}{2b} \right) \quad (8-27)$$

于是,由式(8-16)得扭矩为

$$T = 2 \iint_A \psi \, dx dy = 16G\varphi ab^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{64b}{\pi^5 a} \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \frac{n\pi a}{2b}}{n^5} \right)$$

引进符号

$$\alpha = f_1 \left(\frac{b}{a} \right) = \left(\frac{1}{3} - \frac{64b}{\pi^5 a} \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \frac{n\pi a}{2b}}{n^5} \right) \quad (8-28)$$

则

$$\varphi = \frac{T}{16Gab^3 \alpha} = \frac{T}{K_t} \quad (8-29)$$

其中, $K_t = 16\alpha Gab^3 = \alpha G(2a)(2b)^3$, 称为抗扭刚度。将式(8-29)代入式(8-27), 得

$$\psi = -\frac{T}{16\alpha ab^3} \left(y^2 - b^2 + \frac{32b^2}{\pi^3} \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^3 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}} \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{2b} \cos \frac{n\pi y}{2b} \right) \quad (8-30)$$

从而可得切应力

$$\begin{aligned} \tau_{zx} = \tau_{xz} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ &= -\frac{T}{16\alpha ab^3} \left(2y - \frac{16b}{\pi^2} \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}} \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{2b} \sin \frac{n\pi y}{2b} \right) \\ \tau_{zy} = \tau_{yz} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ &= -\frac{T}{16\alpha ab^3} \left(\frac{16b}{\pi^2} \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{2b} \cos \frac{n\pi y}{2b} \right) \end{aligned} \quad (8-31)$$

在 $x=0, y=\pm b$ 处切应力取得最大值, 即

$$|\tau_{\max}| = \frac{2T}{16\alpha ab^2} \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}} \right)$$

$$= \frac{T}{8\beta ab^2} = \frac{T}{\beta(2a)(2b)^2} \quad (8-32)$$

其中

$$\beta = \frac{\alpha}{\left(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}} \right)} = f_2 \left(\frac{a}{b} \right)$$

由 $\beta = f_2 \left(\frac{a}{b} \right)$ 及式(8-28) $\alpha = f_1 \left(\frac{a}{b} \right)$ 可知, α 和 β 随 $\frac{a}{b}$ 而变化, 表 8-1 给出了不同 $\frac{a}{b}$ 时的 α 及 β 值。

表 8-1

a/b	α	β	a/b	α	β
1.0	0.141	0.208	3.0	0.263	0.267
1.2	0.166	0.219	4.0	0.281	0.282
1.5	0.196	0.231	5.0	0.291	0.291
2.0	0.229	0.246	10.0	0.312	0.312
2.5	0.249	0.258	∞	0.333	0.333

由表 8-1 看出, 当 a/b 很大时, 即对于很窄的矩形截面, α 和 β 值均趋于 $1/3$, 此时式(8-29)和式(8-32)简化为

$$\varphi = \frac{3T}{G(2a)(2b)^3}$$

和

$$\tau_{\max} = \frac{3T}{(2a)(2b)^2} \quad (8-33)$$

其中 $2a$ 和 $2b$ 分别为矩形截面的长和宽(图 8-6)。

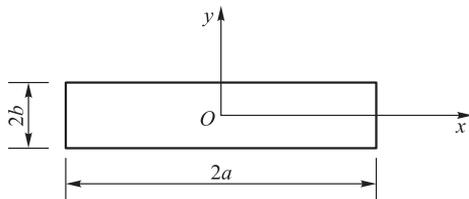


图 8-6

§ 8-3 薄膜比拟法

以下将看出,弹性扭转问题用应力函数写出的微分方程,与表面受压力作用的薄膜的挠度方程在形式上完全相似,因而求解扭转问题时,就可以用解张紧的薄膜的挠度问题来比拟,即薄膜比拟法。这样,对一些截面形状复杂的柱体扭转就可以避开数学上的困难,而采用这种比拟的实验方法,求出扭转问题的解。

假定在一块板上开一个与柱体断面形状相同的孔(尺寸不必相同),孔上敷以张紧的均匀薄膜,支持在边界上,则薄膜一侧受均匀压力作用时,各点就要发生挠度(图 8-7)。此时薄膜受均匀张力作用,其任一矩形微小单元 $abcd$ 的边长为 dx 、 dy ,如令单位长度的张力为 s ,则在小挠度情况下,作用在 ab 边上的张力在 z 方向的投影为

$$-sdy \frac{\partial z}{\partial x}$$

作用在 dc 边的张力在 z 方向的投影为

$$sdy \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx \right)$$

同样可得 ac 及 bd 边的张力在 z 方向的投影分别为 $-sdx \frac{\partial z}{\partial y}$ 和 $sdx \left(\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy \right)$ 。

在不计薄膜重量时, s 可认为常数。故薄膜的竖向平衡方程为

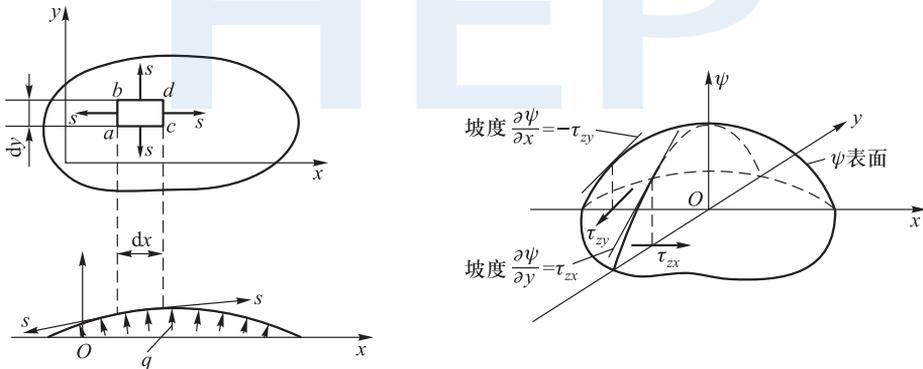


图 8-7

$$-sdy \frac{\partial z}{\partial x} + sdy \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx \right) - sdx \frac{\partial z}{\partial y} +$$

$$sdx\left(\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right) + qdxdy = 0$$

即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{q}{s} \quad (8-34)$$

$$z=0 \text{ (沿边界线)}$$

上式(8-34)也是泊松方程,与方程(8-10)比较,可知薄膜问题与扭转问题相似,其各量之间的对应关系列入表8-2。

表 8-2

薄膜问题	扭转问题
z	ψ
$1/s$	G
q	2φ
$-\partial z/\partial x, \partial z/\partial y$	τ_{zy}, τ_{zx}
$2V$	T

表8-2中 V 为薄膜下的体积。这就是说,膜的平衡位置 z 与 ψ 曲面相似,膜的等挠度线与切应力线相似,膜在任一点的坡度与相应的合切应力成比例。由此得到结论:

- (1) 杆件上任一点的最大切应力的方向,就是薄膜上相应点处等挠度线在该点的切线方向,其大小与过该点的切面沿法线方向的斜率成正比;
- (2) 薄膜的等挠度线与截面的等切应力线一致;
- (3) 薄膜挠曲面下的体积与扭矩成比例。

§ 8-4 开口薄壁杆扭转问题的近似计算

对于具有窄长截面的杆,其自由扭转问题的解可利用薄膜比拟法。令杆的横截面尺寸为:长度为 b ,宽度为 δ ,坐标系 x, y 的原点取在截面中心处, x 方向沿宽度方向。可以认为薄膜形状沿截面的 b 方向不变,在不计薄膜两端处的坡度时,即可认为薄膜呈一柱面,于是有

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

而式(8-34)则简化为

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{q}{s} \quad (8-35)$$

将上式积分两次后,考虑到边界条件($x=0$ 处, $dz/dx=0$; $x=\delta/2$ 处, $z=0$),得

$$z = \frac{1}{2} \frac{q}{s} \left[\left(\frac{\delta}{2} \right)^2 - x^2 \right] \quad (8-36)$$

即薄膜挠度在 δ 方向为一抛物线。于是,薄膜下的体积为

$$V = \frac{qb\delta^3}{12s}$$

根据上节给出的比拟关系: q 换成 2φ , $1/s$ 换成 G ,因而扭矩的近似公式为

$$T = 2V = \frac{1}{3} b\delta^3 G\varphi = I_1 G\varphi \quad (8-37)$$

其中 $I_1 = b\delta^3/3$ 为薄矩形截面的截面二次极矩(极惯性矩)。已知

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial z}{\partial x} = 2G\varphi x \quad (8-38)$$

单位长度的转角由扭矩公式,得

$$\varphi = \frac{3T}{b\delta^3 G} \quad (8-39)$$

由式(8-38)可见,最大切应力发生在 x 为最大值 $\pm\delta/2$ 处,即最大切应力发生在周边最靠近形心轴的点上,其值为

$$\tau_{\max} = G\varphi\delta = \frac{3T}{b\delta^2} \quad (8-40)$$

或

$$T = \frac{1}{3} b\delta^3 \tau_{\max} \quad (8-41)$$

对于如图 8-8 所示的由多个狭长矩形组成的开口薄壁杆件,由薄膜比拟可以想象,各矩形薄膜单独受相同压力作用后的形状与组合体中对应的矩形薄膜变形后的形状除在结合处附近不同外,其余大部分区域相同。因此,对于截面为多个窄条组成的杆的自由扭转,就可以看成是若干窄条截面扭转问题的解的组合。

例 8-1 求工字形截面杆受扭矩 T 作用时的最大切应力(图 8-8)。

解:将图示三个矩形窄条的抗扭刚度相加后,可得

$$\varphi = \frac{T}{G \left(\frac{1}{3} b_1 \delta_1^3 + \frac{2}{3} b_2 \delta_2^3 \right)}$$

$$= \frac{3T}{G} \frac{1}{b_1 \delta_1^3 + b_2 \delta_2^3}$$

于是有

$$\tau_{\max} = G\varphi\delta_i = \frac{3T\delta_i}{b_1\delta_1^3 + 2b_2\delta_2^3} \quad (8-42)$$

其中 δ_i 为 δ_1, δ_2 中较大的一个。

应当指出,在图 8-8 中角点处将由于应力集中而产生很大的应力,因而,将首先在这里进入塑性状态。实际工程上,截面在此总做成圆角。

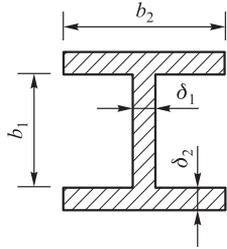


图 8-8

本章复习要点

1. 柱体扭转问题的特点是,对于非圆形截面柱体来说,在扭转过程中,柱体截面要发生翘曲变形,即 $w(x, y, z) \neq 0$ 。

2. 普朗特应力函数 ψ 满足泊松方程

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2G\varphi$$

3. 任一点上的切应力为

$$\tau = |\text{grad } \psi|$$

ψ 的等值线是切应力线。

4. 受张力的薄膜平衡问题与柱体扭转问题的基本方程相似。

思考题

- 8-1 为什么非圆形截面柱体受扭后,其截面要发生翘曲?
- 8-2 截面的周边为什么也是一条切应力线?
- 8-3 $\nabla^2 \psi = -2G\varphi$ 的成立有何约束条件?
- 8-4 若要求解一个闭口截面杆的扭转问题,将遇到什么困难?有什么办法求解?

习题

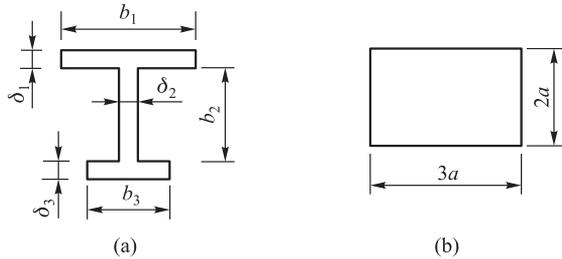
8-1 试证柱体扭转时,任一横截面上的切应力方向与边界切线方向重合。提示:利用柱体侧表面的自由边界条件容易得到。

8-2 如有边长为 a 的正方形截面柱体和直径为 a 的圆截面柱体,试求各自的最大切应

力。哪一种截面的抗扭刚度较大？

8-3 试求有图示形状的截面柱体的抗扭刚度。

答案：(a) $K_t = G(b_1\delta_1^3 + b_2\delta_2^3 + b_3\delta_3^3)$ ；(b) $4.72Ga^4$ 。



题 8-3 图

8-4 试证明 $\psi = A(\rho^2 - a^2)$ 既可以用来求解实心圆截面柱体也可解圆管的扭转问题。求出用 $G\varphi$ 表示的 A 。

答案： $A = -\frac{1}{2}G\varphi$ 。

8-5 试求椭圆形截面受扭作用时的最大切应力。并比较圆形截面时的结果与材料力学中得到的结果。

提示：取应力函数为

$$\psi = k \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

k 为任意常数， a, b 为椭圆的长、短轴。

答案： $\tau_{\max} = \frac{2T}{\pi ab^2}$ 。

§ 9-1 基本概念与基本假定

在工程结构中,经常用板作为一种结构构件。由两个平行平面和垂直于这两平面的柱面所围成的物体,称为平板,简称板。板的几何特点是其厚度远小于其他两个方向的尺寸(图 9-1)。

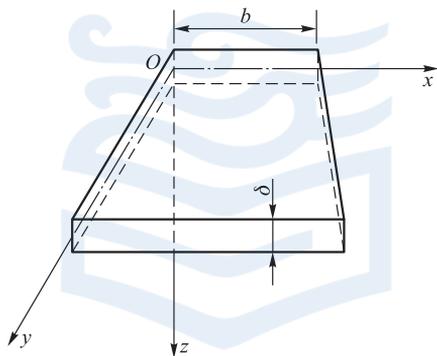


图 9-1

板可分为薄板与厚板以及薄膜。所谓薄板,实际上是有有一定厚度的板。通常把满足下列条件的板算为薄板

$$\left(\frac{1}{100} \sim \frac{1}{80}\right) \leq \frac{\delta}{b} \leq \left(\frac{1}{8} \sim \frac{1}{5}\right)$$

其中 b 为板的较小的边长, δ 为板的厚度。否则就是厚板 $\frac{\delta}{b} > \left(\frac{1}{8} \sim \frac{1}{5}\right)$ 或薄膜

$\frac{\delta}{b} < \left(\frac{1}{100} \sim \frac{1}{80}\right)$ 。采用薄板一词只是为了区别于厚板与薄膜。

板是一种主要抗弯扭的结构单元。厚度很小的薄膜,其抗弯扭的能力很低,可认为其抗弯刚度等于零,而横向外荷载由轴向力——中面剪力来承担;当板的厚度足够大时,其内部任一点的应力状态与三维物体类似,难以采用较多的简化措施,所以厚板的分析要复杂得多。薄板具有中等厚度,可以进行简化,本章只讨论这种薄板的小挠度理论(最大挠度与板厚之比在 $1/10 \sim 1/5$ 或最大挠度与

最小边长之比不大于1/50,可认为是小挠度理论的界限)。

对薄板小挠度理论,普遍采用以下基本假定:

(1) 变形前垂直于中面的任一直线段,变形后,仍为直线,并垂直于变形后的弹性曲面,且长度不变。

(2) 垂直于板中面方向的应力较小,可略去不计。

以上两项重要的假定称为基尔霍夫-勒夫假定。其中,所谓中面是指平分板厚的平面。显然,变形前的中面为与板的上下表面平行的平面。变形后,板发生挠曲,中面变成了曲面,称之为弹性曲面,也称为变形后的中面,统称中面。

下面进一步分析这些假定的力学意义,并由此导出弹性薄板小挠度理论的基本关系式。

上述第一条假定习惯上称为直法线假定,和材料力学中梁的弯曲理论中平截面假定相似,图9-2是直法线假定的几何表示。图中给出了 $y = \text{常数}$ 的截面。其中,1-1,2-2为两条垂直于中面的法线。变形前后都是与中面相垂直的直线。于是可得

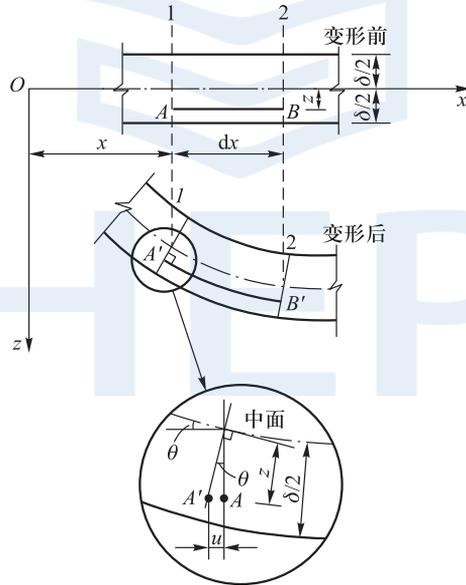


图 9-2

$$\gamma_{xz} = 0$$

即

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (9-1)$$

同理,可给出 $x = \text{常数}$ 的截面,同样由直法线假定,得

$$\gamma_{yz} = 0$$

即

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad (9-2)$$

由图 9-2 可知,距中面为 z 处的 AB 层变形后变为 $A'B'$, 设 A 点的横坐标为 x , B 点的横坐标为 $x+dx$, 则当 $y = \text{常数}$, 坐标为 x 的 A 点, 变形后的位移为 u 。考虑到 θ 为小量, 故

$$\begin{aligned} u &= -z \sin \theta \approx -z \tan \theta \\ \tan \theta &= \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (a)$$



[标注 9-1:
对式(a)的说明]

对于

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (9-3)$$

此处 u, w 分别以指向 x, z 的正方向时为正, θ 以顺时针旋转为正。当 θ 为正时, u 为负。

同理,对于 $x = \text{常数}$ 的截面,坐标为 (y, z) 的一点处的水平位移为

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (9-4)$$

由以上两式可知,在中面 ($z=0$) 处位移 u 和 v 均等于零。

第一项假定中的直法线长度不变可表示为

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (9-5)$$

由此得到

$$w = w(x, y) \quad (9-6)$$

即中面的挠度仅为 x, y 的函数。这就是说,垂直于中面的任一根法线上各点的位移 w 均相同。

第二项假定给出

$$\sigma_z = 0 \quad (9-7)$$

由此连同第一项假定中的 $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = \varepsilon_z = 0$ 便可得到薄板弯曲的下列本构关系

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (9-8)$$

由式(9-3),式(9-4)及式(9-6)可知,对于薄板问题来说,重要的是求薄板的挠曲函数 $w(x,y)$ 。

应当指出,第一章曾对弹性理论所作的基本假定仍然有效,例如材料的均匀性、连续性、各向同性及小变形假定等。



Kirchhoff, G. R. (1824—1887)

基尔霍夫(Kirchhoff, G. R.), 1824年生于德国, 1887年逝世。曾在海登堡大学和柏林大学任物理学教授, 他发现了电学中的“基尔霍夫定律”, 同时在弹性力学, 特别是在薄板力学问题研究中也做出了重要贡献。薄板弯曲理论的基本假定是他和勒夫提出的。



Love, A. E. H. (1863—1940)

勒夫(Love, A. E. H.), 1863年生于英国, 1940年逝世。牛津大学自然哲学教授, 在数学、弹性力学方面做出了杰出的贡献。例如他和基尔霍夫共同给出了薄板的合理简化假定, 首先发现了在介质界面处弹性波的传播规律(称为勒夫)。他所著《数学弹性理论》被译成多种文字, 公认为经典巨著。

§ 9-2 薄板弯曲的平衡方程

求解薄板弯曲问题时,由于采用了以上两条基本假定而使位移分量均可表示为挠度 w 的函数。从而,用位移(w)作为基本未知量(即位移法)来求解有明显的优点。以下讨论建立薄板弯曲的基本方程。

对于矩形板,采用图 9-3 所示的直角坐标系。如从其中取出一边长为 dx 、 dy 、 δ 的微小单元,如图 9-3 所示, $abcd$ 放大以后为图 9-4 所示的情况,此时,微小单元的顶部有外荷载 $q dx dy$ 作用。底面为自由表面,其他四个表面有板的内力作用。其中,在外法线与 x 轴相平行的面上,有 $\sigma_x, \tau_{xz}, \tau_{xy}$ 作用。由以上假定可知,应力 $\sigma_x, \tau_{xz}, \tau_{xy}$ 的分布均以中面为对称面,其中 σ_x, τ_{xy} 反对称分布, τ_{xz} 对称分布(图 9-4a),且分别合成弯矩 M_x 、扭矩 M_{xy} 和横向剪力 F_{Sx} (图 9-4b)。如果 M_x, M_{xy}, F_{Sx} 等分别表示单位长度上的相应值,则有

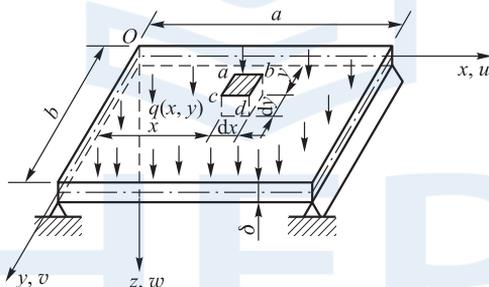


图 9-3

$$M_x = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} z \sigma_x dz, \quad M_y = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} z \sigma_y dz \quad (9-9)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} z \tau_{xy} dz \quad (9-10)$$

$$F_{Sx} = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \tau_{xz} dz, \quad F_{Sy} = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \tau_{yz} dz \quad (9-11)$$

现在设法将所得内力式(9-9)~式(9-11)用位移函数 w 来表示。为此,由广义胡克定律式(9-8),有

$$\sigma_x = E \varepsilon_x + \nu \sigma_y \quad (a)$$

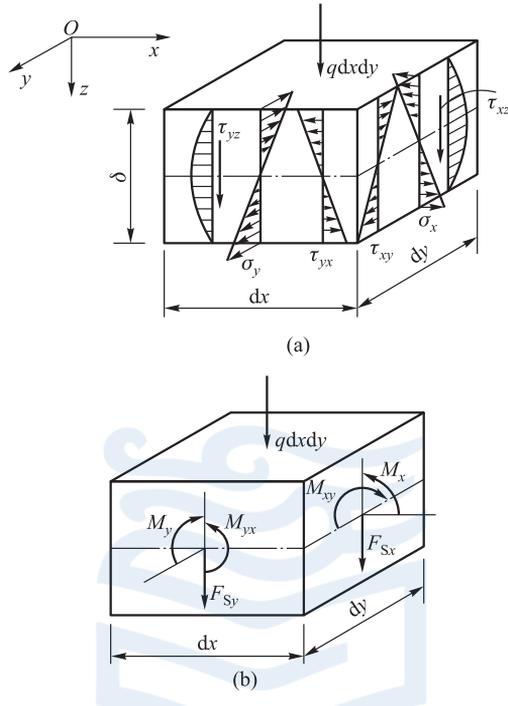


图 9-4

$$\sigma_y = E\varepsilon_y + \nu\sigma_x \quad (b)$$

将上式(b)代入式(a)中,得

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \quad (c)$$

同理得

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \quad (d)$$

类似地,有

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} = \tau_{yx} \quad (e)$$

由应变位移方程,并考虑到式(9-3),式(9-4),有

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (9-12)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (9-13)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (9-14)$$

由基本假定知

$$\varepsilon_z = 0, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

于是,有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (9-15)$$

将式(9-15)代入式(9-9)~式(9-11)积分,可得

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (9-16)$$

其中

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)} \quad (9-17)$$

称为薄板的抗弯刚度。

同理有

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (9-18)$$

$$\begin{aligned} M_{xy} &= -\frac{E}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} z^2 dz \\ &= \frac{E\delta^3}{12(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -(1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (9-19)$$

$M_x, M_y, M_{xy}, F_{S_x}$ 和 F_{S_y} 称为广义力。作用在微小单元上的力如图 9-5a 所示。图中给出了各力的正方向,或简单地用力矩矢量表示(图 9-5b)。

与以上广义力相对应的广义应变分别为

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

其中 κ_x 实际上是中面在与 xz 面相平行的平面内的曲率,因为,如令 R_x 为其曲率半径,则

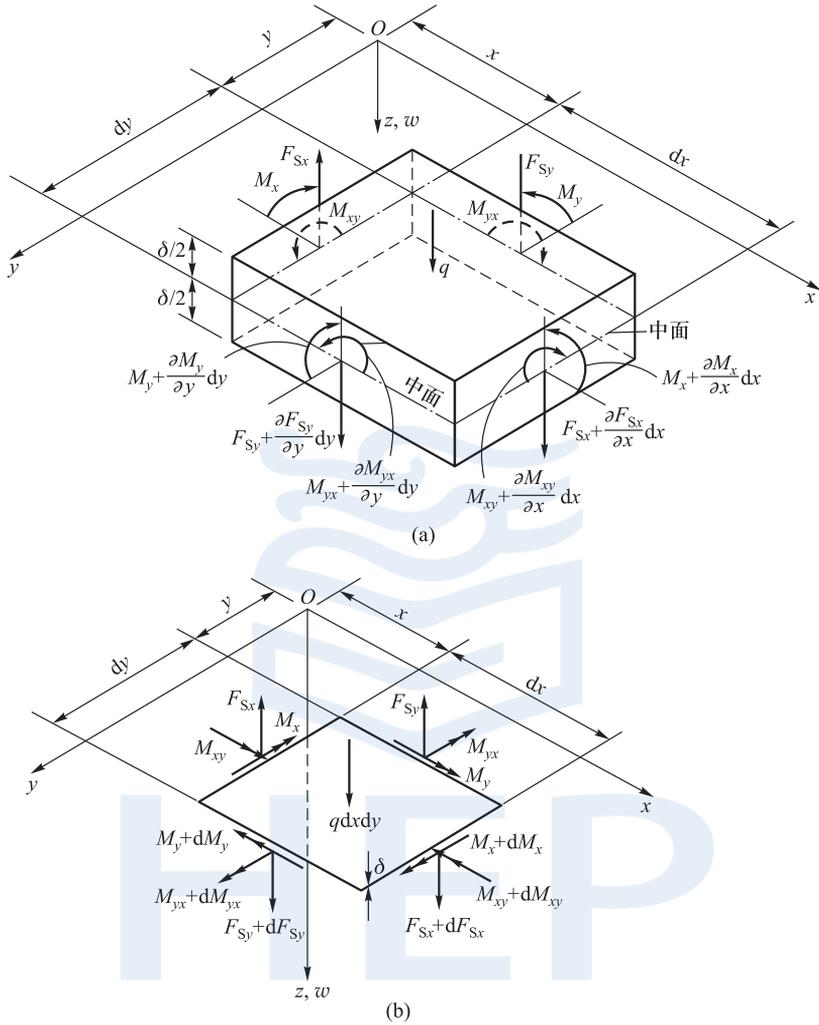


图 9-5

$$\frac{1}{R_x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

此处负号是因为取挠曲面的凸面向下为正曲率时,其二次导数 $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ 为负。同理

$$\frac{1}{R_y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

而 κ_{xy} 叫作曲面对 xy 轴的扭率。于是,式(9-16)、式(9-18)、式(9-19)可写成

$$\left. \begin{aligned} M_x &= D(\kappa_x + \nu\kappa_y) \\ M_y &= D(\kappa_y + \nu\kappa_x) \\ M_{xy} &= (1-\nu)D\kappa_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (9-20)$$

现在考虑上述微小单元 $dxdy$ 的平衡条件,由此建立薄板弯曲问题的平衡方程。在这种情况下,平衡条件为

$$\sum M_x = 0, \sum M_y = 0, \dots, \sum F_z = 0$$

当坐标原点取在 $dxdy$ 的角点上时,由绕 y 轴的力矩之和等于零,得

$$\begin{aligned} &\left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x}dx\right)dy - M_x dy + \left(M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}dy\right)dx - \\ &M_{yx} dx - \left(F_{S_x} + \frac{\partial F_{S_x}}{\partial x}dx\right)dy dx - q dx dy \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned}$$

整理后,略去高阶微量,可得

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = F_{S_x} \quad (9-21)$$

同理,由绕 x 轴力矩之和为零,可得

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = F_{S_y} \quad (9-22)$$

由 $\sum F_z = 0$, 得

$$\frac{\partial F_{S_x}}{\partial x} dx dy + \frac{\partial F_{S_y}}{\partial y} dx dy + q dx dy = 0$$

即

$$\frac{\partial F_{S_x}}{\partial x} + \frac{\partial F_{S_y}}{\partial y} = -q$$

将式(9-21)和式(9-22)代入上式。并考虑到 $M_{yx} = M_{xy}$, 则得

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q \quad (9-23)$$

将式(9-16)、式(9-18)、式(9-19)代入上式,则得用位移函数 w 表示的平衡方程,即

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (9-24)$$

或写成

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = q \quad (9-24')$$

其中 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为拉普拉斯算子。式(9-24)为薄板弯曲问题的平衡微分方程。从而,求解薄板弯曲问题归结为,在满足边界条件情况下由式(9-24)求解 $w(x, y)$ 。进而根据式(9-16),式(9-18)及式(9-19)求得弯矩和扭矩,又可根据式(9-15)求出应力。如欲求剪力 F_{Sx}, F_{Sy} ,则可引用式(9-21)、式(9-22),得

$$\left. \begin{aligned} F_{Sx} &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ F_{Sy} &= \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9-25)$$

或

$$\left. \begin{aligned} F_{Sx} &= -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) \\ F_{Sy} &= -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) \end{aligned} \right\} \quad (9-25')$$

§ 9-3 边界条件

薄板弯曲问题的准确解必须同时满足平衡微分方程(9-24)和给定的边界条件。由于式(9-24)为一四阶偏微分方程,因而,在每个边界上应给出2个边界条件。

典型的边界条件可分为三类:

(1) 几何边界条件。即在边界上给定边界挠度 w 和边界切向转角 $\frac{\partial w}{\partial t}$, 此处 t 为边界切线方向。

(2) 静力边界条件。即在边界上给定横向剪力和弯矩。

(3) 混合边界条件。即在边界上同时给定广义力和广义位移。如对于弹性支承边,除给定边界剪力外,还给定弹性反力 $-kw$, 此处 k 为弹性系数, w 为边界已知挠度。或除给定边界弯矩外,还给定弹性反力矩 $-k' \frac{\partial w}{\partial n}$, 此处 k' 为抗弯刚度系数, n 为边界的法线方向。

以下讨论常见的边界支承情况和相应的边界条件。

一、固定边界(图 9-6)

在固定边,显然有位移与转角为零的几何条件,即在 $x=0$ 边,有

$$\left. \begin{aligned} (w)_{x=0} &= 0 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9-26)$$

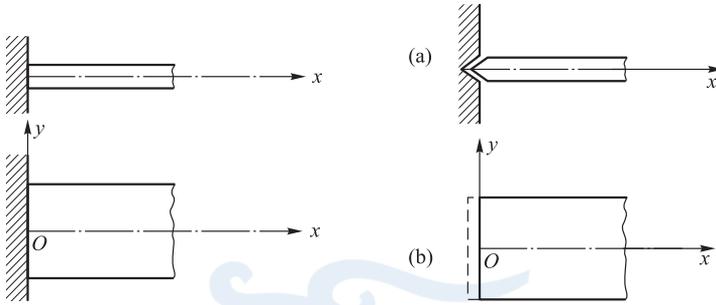


图 9-6

图 9-7

二、简支边界(图 9-7)

板在简支边(用图 9-7b 中的虚线表示)不能有竖向(y 方向)的位移,但可以有微小转动。故这种边界上挠度等于零(几何条件)和弯矩等于零(静力条件),即在 $x=0$ 边,有

$$\left. \begin{aligned} (w)_{x=0} &= 0 \\ (M_x)_{x=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9-27)$$

由于有

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

同时,在 $x=0$ 处,有

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

故式(9-27)可化为

$$\left. \begin{aligned} (w)_{x=0} &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9-28)$$

三、自由边界(图 9-8)

对于自由边界,有下列静力条件,即

$$\left. \begin{aligned} (M_x)_{x=a} &= 0 \\ (M_{xy})_{x=a} &= 0 \\ (F_{Sx})_{x=a} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9-29)$$

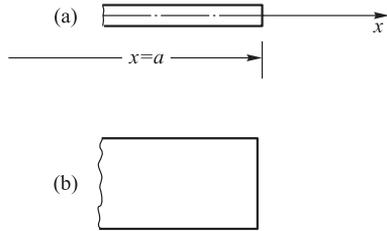


图 9-8

式(9-29)给出了3个静力条件,进一步分析可以证明这3个条件并不是独立的。其中 M_{xy} 可用等效剪力来表示。实际上,作用在 $x=a$ 边界上长度为 dy 的微小单元上的扭矩 $M_{xy}dy$ (图 9-9a),可用2个大小相等、方向相反、相距 dy 的垂直力(大小为 M_{xy})来代替(图 9-9b),显然,这种代换是静力等效的。

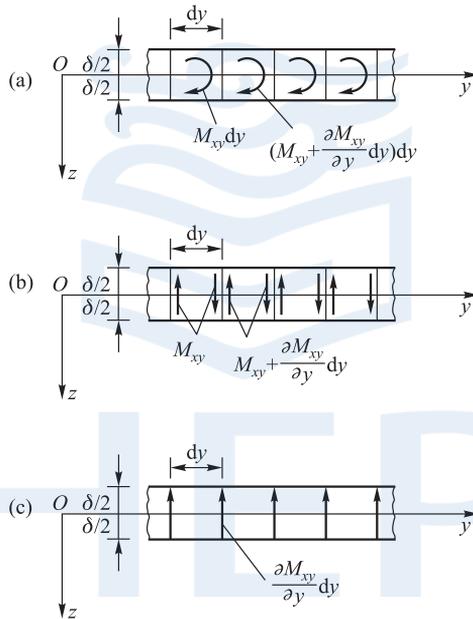


图 9-9

根据圣维南原理,这一代换的影响是局部的。故经过图 9-9 这样的代换后,两相邻微小单元间只需增加一个集度为 $\partial M_{xy} / \partial y$ 的竖向剪力就可以了(图 9-9c)。这样,在边界 $x=a$ 的自由边界上总的分布剪力 F_{Vx} 应为

$$F_{Vx} dy = \left(F_{Sx} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) dy = 0$$

或

$$\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=a} = 0 \quad (9-30)$$

而式(9-29)中的第一式可改写为

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0 \quad (9-31)$$

应当特别指出,如相邻两边都是自由边界,如图9-10所示,则当将扭矩用剪力做静力等效代替以后,则角点B将出现未抵消的集中剪力 F_{SR} (图9-11)。

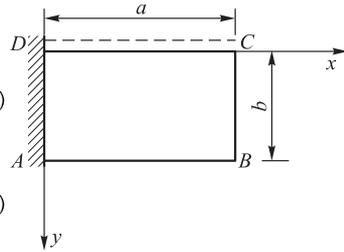


图 9-10

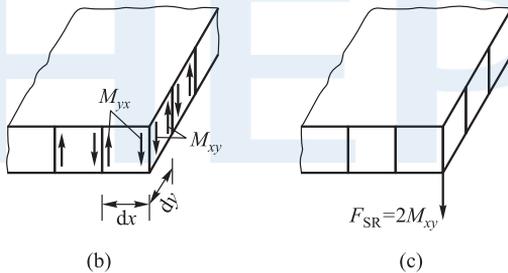
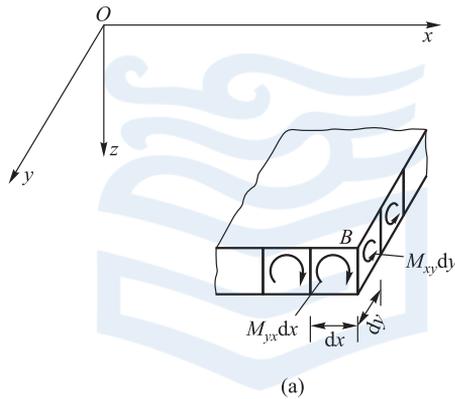


图 9-11

由于 B 点处于自由状态,故应有

$$(F_{SR})_{x=a, y=b} = 2(M_{xy})_{x=a, y=b} = 0$$

或

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{x=a, y=b} = 0 \quad (9-32)$$

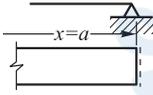
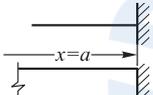
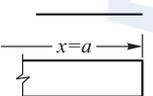
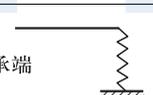
此即角点 B 应满足的条件。显然,如 B 点有柱支承,则角点 B 应满足下列条件:

$$(w)_{\substack{x=a \\ y=b}} = 0$$

此外,当自由边与简支边或固定边相邻,或两非自由边相邻处有集中力时,将被反力所吸收,不需要列条件。还有其他类型的边界条件,均一并列入表 9-1 中。

由此可见,板的边界条件由 $w, \partial w / \partial n, M_n, F_{Vn}$ 4 个量中的 2 个组成。此处 n 表示边界外法线方向, F_V 为单位长度的竖向边界力(如 $F_{Vx} = F_{Sx} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \dots$)。

表 9-1 矩形板的各种边界条件

边界支承种类	数学表达式
简支端 	$(w)_{x=a} = 0$ $(M_x)_{x=a} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0$
固定端 	$(w)_{x=a} = 0$ $\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} = 0$
自由端 	$(M_x)_{x=a} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0$ $(F_{Vx})_{x=a} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=a} = 0$
弹性嵌固端 	$(w)_{x=a} = 0$ $\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} = (k')^{-1} D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a}$
弹性支承端 	$(M_x)_{x=a} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0$ $(w)_{x=a} = k^{-1} D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=a}$

注: k 为弹性支承的抗压刚度, k' 为弹性约束的抗旋转刚度。

§ 9-4 板的柱面弯曲

如果板的一个方向有足够的长度(图 9-12a),荷载沿 y 方向均匀分布,而只沿 x 方向变化,即 $p = p(x)$ 时,则板变形后,实际上将弯曲成柱形曲面,柱面母线

与 y 轴平行,故挠度 w 只是 x 的函数。这样,可取其中某一沿 y 方向为单位长度的窄条(图中阴影部分)来分析。由于有 $w = w(x)$,故平衡方程(9-24)退化为

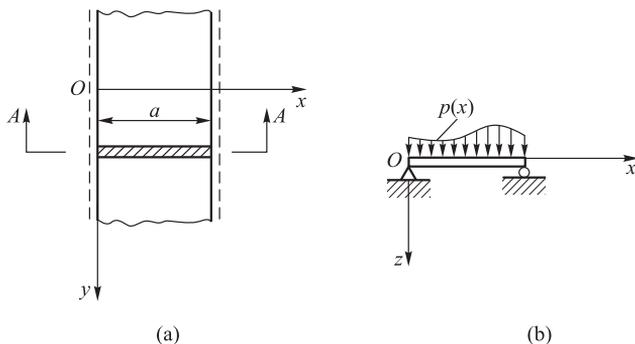


图 9-12

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{p(x)}{D} \quad (9-33)$$

式(9-33)和熟知的梁的平衡微分方程

$$\frac{d^4 w^*}{dx^4} = \frac{p(x)}{EI} \quad (9-34)$$

完全相似。故这类板的柱面弯曲问题的解可完全依照梁的弯曲问题的解法求得。比较式(9-33)与式(9-34),显然有

$$w = w^* (1 - \nu^2) \quad (9-35)$$

可见,在同样荷载 $p(x)$ 作用下,这类板的挠度要比梁的挠度小,其减小的系数为 $(1 - \nu^2)$ 。

为求方程(9-33)的解,在两端简支时,可将板的挠度与外荷载用傅里叶级数展开,即令

$$w(x) = \sum_m w_m \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (9-36)$$

$$p(x) = \sum_m p_m \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (9-37)$$

将式(9-36)、式(9-37)代入式(9-33),得

$$w_m = \frac{a^4 p_m}{D m^4 \pi^4} \quad (9-38)$$

于是

$$w(x) = \sum_m \frac{a^4 p_m}{\pi^4 D m^4} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (9-39)$$

$$m = 1, 3, 5, \dots$$

如板不是两边简支,在积分平衡方程(9-33)时,要根据边界条件确定4个积分常数。所以最简单的方法是利用梁的公式,考虑到式(9-35)即可方便地得到挠度的公式。

由于 y 方向的曲率为零,即

$$\frac{d^2 w}{dy^2} = 0$$

故弯矩、扭矩及横向剪力分别为

$$M_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (9-40)$$

$$M_y = -D\nu \frac{d^2 w}{dx^2} = \nu M_x \quad (9-41)$$

$$M_{xy} = 0$$

$$F_{Sx} = -D \frac{d^3 w}{dx^3}$$

$$F_{Sy} = 0$$

例 9-1 设有一边简支一边固定的板条,受均布荷载作用(图9-13),试求固定边的弯矩。

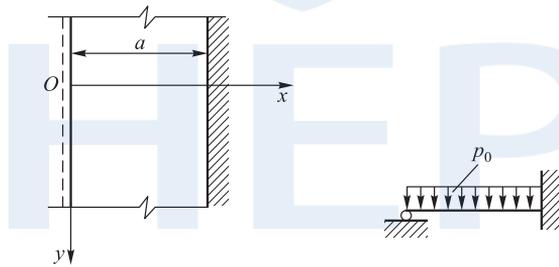


图 9-13

解: 根据梁的挠曲线公式,取板柱面弯曲的挠度为

$$w(x) = \frac{p_0 a^4}{48D} \left[\frac{x}{a} - 3 \left(\frac{x}{a} \right)^3 + 2 \left(\frac{x}{a} \right)^4 \right]$$

故固定边弯矩为

$$(M_x)_{x=a} = -D \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) = -\frac{p_0 a^2}{8}$$

$$(M_y)_{x=a} = \nu M_x = -\nu \frac{p_0 a^2}{8}$$

§ 9-5 矩形板的经典解法

现在以简支边矩形板为例,说明薄板弯曲问题的解法。图 9-14 给出了边长为 a, b 的受均布荷载 $q(x, y)$ 作用的简支矩形板。

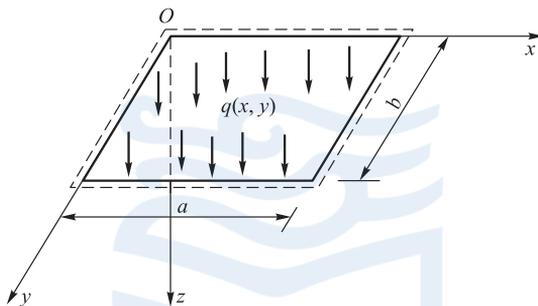


图 9-14

边界条件为

$$\left. \begin{aligned} (w)_{x=0} = (w)_{x=a} = 0 \\ (w)_{y=0} = (w)_{y=b} = 0 \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=0} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=a} = 0 \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=b} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9-42)$$

如前所述,所论问题归结为按上述边界条件求解薄板平衡微分方程

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = q(x, y) \quad (9-43)$$

求解上述问题的方法甚多。以下介绍一个基本的、广泛应用的分离变量法。用这种方法求解,通常取为无穷级数形式,在很多情况下,这种级数收敛很快。在直角坐标系中,最方便的是采用莱维(Lévy, M.) 1899年提出的下列级数形式的解,即莱维解:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (9-44)$$

其中 $Y_m(y)$ 只是 y 的函数。这就是说,将挠度函数 w 展成一个半幅的单傅里叶正弦级数。

对 $x=0$ 和 $x=a$ 的边为简支(图 9-15)的板,级数式(9-44)中的每一项都满足该两边的边界条件。剩下的问题是使其满足 $y=\pm b/2$ 的边界条件及微分方程,并由此确定 Y_m 。

这一方法用于解矩形薄板弯曲问题时,由于是解非齐次微分方程,故应取

$$w = w_1 + w_2 \quad (9-45)$$

其中 w_1 和 w_2 分别为方程的齐次解和特解,即分别满足

$$\nabla^2 \nabla^2 w_1 = 0 \quad (9-46)$$

和

$$D \nabla^2 \nabla^2 w_2 = q(x, y) \quad (9-47)$$

因式(9-45)与荷载无关,又因式(9-45)应满足全部边界条件,故将 w_1 取级数式(9-44)的形式,且考虑到对称性, m 应取奇数,即 $m = 1, 3, 5, \dots$ 。于是,由式(9-46),得

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(Y_m^{(4)} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m^{(2)} + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m \right) \sin \frac{m \pi x}{a} = 0$$

上式对所有 x 都应成立,由此有

$$Y_m^{(4)} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m^{(2)} + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m = 0 \quad (9-48)$$

此方程的通解为下列形式:

$$Y_m = \frac{qa^4}{D} \left(A_m \operatorname{ch} \frac{m \pi y}{a} + B_m \frac{m \pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m \pi y}{a} + C_m \operatorname{sh} \frac{m \pi y}{a} + D_m \frac{m \pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m \pi y}{a} \right) \quad (9-49)$$

这样,在 y 为常数的 2 个边界上须满足 4 个边界条件,如果板的挠曲对于 x 轴对称,则在 Y_m 中只能有对称函数,故有

$$C_m = D_m = 0$$

于是得

$$Y_m = \frac{qa^4}{D} \left(A_m \operatorname{ch} \frac{m \pi y}{a} + B_m \frac{m \pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m \pi y}{a} \right) \quad (9-50)$$

如此只须满足 2 个边界条件。

关于特解,我们只须取一满足方程(9-47)的解即可。一般假设板弯曲成一柱面,于是可按 § 9-4 给出的求解。当板受均布荷载(q =常数)作用时,可取

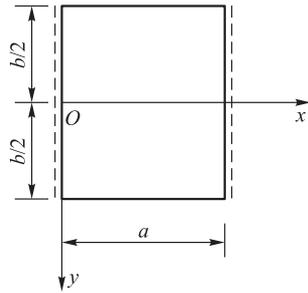


图 9-15

$$w_2 = \frac{q}{24D}(x^4 - 2ax^3 + a^3x) \quad (9-51)$$

式(9-51)实际上是材料力学中简支梁受均布荷载问题的解,所不同的是 D 已代替了 EI 。如此,式(9-47)即可满足,同时也满足了边界条件。所以 w_2 可作为特解。

于是,板的位移函数为

$$w = w_1 + w_2 = \frac{q}{24D}(x^4 - 2ax^3 + a^3x) + \frac{qa^4}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (9-52)$$

现在只须求出常数 A_m, B_m 。为此,把上式等号右边第一项展开为三角级数,即

$$\frac{q}{24D}(x^4 - 2ax^3 + a^3x) = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (9-51')$$

其中 $m=1, 3, 5, \dots$,现在位移函数式(9-52)可写为

$$w = \frac{qa^4}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi^5 m^5} + A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (9-53)$$

将式(9-53)代入下列边界条件:

$$(w)_{y=\pm b/2} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=\pm b/2} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{4}{\pi^5 m^5} + A_m \operatorname{ch} \alpha_m + B_m \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m &= 0 \\ (A_m + 2B_m) \operatorname{ch} \alpha_m + B_m \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9-54)$$

其中

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}$$

解式(9-54)后,得

$$A_m = -\frac{2(\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m + 2)}{\pi^5 m^5 \operatorname{ch} \alpha_m}, \quad B_m = \frac{2}{\pi^5 m^5 \operatorname{ch} \alpha_m}$$

于是,得板的挠度为

$$w = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left(1 - \frac{\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m + 2}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + \frac{1}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (9-55)$$

在板中心 $x=a/2, y=0$ 处的最大挠度为

$$(w)_{\max} = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} \left(1 - \frac{\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m + 2}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \right) \quad (9-56)$$

式(9-56)中,级数的前一半相当于两对边为简支的矩形板在均布荷载作用下,柱面弯曲时的最大挠度。实际上由式(9-51')得

$$\frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} = \frac{5}{384} \frac{qa^4}{D}$$

因此,式(9-56)可写成

$$(w)_{\max} = \frac{5}{384} \frac{qa^4}{D} - \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} \frac{\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m + 2}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \quad (9-57)$$

此级数在 $b \geq a$ 收敛很快,只取头一项便可得到很好的结果。

薄板弯曲问题的求解,还可以采用基于变分原理的里茨法或伽辽金法,以及各种数值解法,如有限差分法、有限元法等。

例 9-2 设有图 9-16 所示之四边简支矩形板,两对边 $y = \pm \frac{b}{2}$ 有均布力矩 M_0 作用。试求板的挠曲面方程及对称轴 $y=0$ 上的挠度。

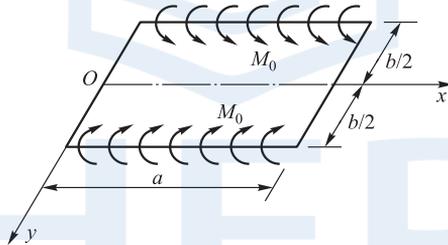


图 9-16

解:

1) 平衡方程为

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \quad (a)$$

2) 边界条件为

$$x=0 \text{ 及 } x=a \text{ 时, } w=0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

$$y = \pm \frac{b}{2} \text{ 时, } w=0, -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = M_0 \quad (b)$$

3) 假定位移函数为

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (c)$$

所设级数的每一项均应满足边界条件。 $x=0$ 及 $x=a$ 处的边界条件显然满足。

按式(9-48) Y_m 应取成下列形式:

$$Y_m = A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + C_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}$$

此式满足式(a)。

4) 求系数。此时结构及荷载边界条件均对称于 x 轴,故 Y_m 一定是 y 的偶函数,因此,上式中的 $C_m = D_m = 0$,由此考虑到边界条件(b)中的第二式,可得

$$A_m = -B_m \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m$$

其中

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}$$

于是得

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \left(\frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (d)$$

其中 B_m 可根据边界条件式(b)确定,在 $y = \pm \frac{b}{2}$ 时,有

$$-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = M_0$$

即

$$-2D \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} B_m \operatorname{ch} \alpha_m \sin \frac{m\pi x}{a} = M_0$$

如边界上的分布力矩 $(M_y)_{y=\pm b/2}$ 也写成下列级数形式

$$(M_y)_{y=\pm \frac{b}{2}} = \frac{4M_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

则系数 B_m 为

$$B_m = -\frac{2M_0 a^2}{D m^3 \pi^3 \operatorname{ch} \alpha_m}$$

5) 将求得的系数代入位移函数,得最终挠度表达式。将 B_m 代入式(d),得

$$w = \frac{2M_0 a^2}{\pi^3 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m} \left(\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} - \right.$$

$$\frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \Big) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (e)$$

在对称轴 $y=0$ 上的挠度为

$$(w)_{y=0} = \frac{2M_0 a^2}{\pi^3 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (f)$$

例 9-3 设有两对边简支、两对边固定的矩形板,受集度为 q 的均布荷载作用(图 9-17),求板中心的挠度。

解:用莱维法解,平衡微分方程为

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D} \quad (9-24')$$

边界条件:

在 $x=0$ 及 $x=a$ 处为

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (a')$$

在 $y = \pm \frac{b}{2}$ 处为

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (b')$$

微分方程(9-43)的解为

$$w = w_1 + w_2 \quad (9-45)$$

其中 w_1 为式(9-43)的齐次解, w_2 为式(9-43)的一个特解。取

$$w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

代入 $\nabla^2 \nabla^2 w = 0$, 解得

$$Y_m(y) = \left(A_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + C_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \frac{qa^4}{D}$$

由于结构与荷载均对称于 x 轴, 则 $Y_m(y)$ 亦应对称于 x 轴, 由此断定 $A_m = D_m = 0$, 且 m 为奇数, 由此得

$$w_1 = \frac{qa^4}{D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + C_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (9-58)$$

特解为

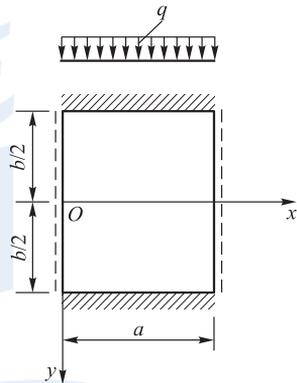


图 9-17

$$w_2 = \frac{q}{24D}(x^4 - 2ax^3 + a^3x)$$

现将 w_2 展为三角级数, 即

$$w_2 = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (9-59)$$

将式(9-58)、式(9-59)代入式(9-45), 得到式(9-43)的通解

$$w = w_1 + w_2 = \frac{qa^4}{D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi^5 m^5} + B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + C_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (9-60)$$

w 应满足边界条件, 并由此确定上式中的待定常数 B_m, C_m 。由式(9-60)确定的

w 满足边界条件式(a')。此外, 由边界条件 $(w)_{y=\pm b/2} = 0$ 及 $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=\pm b/2} = 0$, 可得

$$\frac{4}{\pi^5 m^5} + B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi b}{2a} + C_m \frac{m\pi b}{2a} \operatorname{sh} \frac{m\pi b}{2a} = 0$$

$$B_m \operatorname{sh} \frac{m\pi b}{2a} + C_m \left(\frac{m\pi b}{2a} \operatorname{ch} \frac{m\pi b}{2a} + \operatorname{sh} \frac{m\pi b}{2a} \right) = 0$$

令 $\frac{m\pi b}{2a} = \alpha_m$, 由此可得

$$B_m = -\frac{4}{\pi^5 m^5} \cdot \frac{\alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m + \operatorname{sh} \alpha_m}{\operatorname{ch} \alpha_m (\alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m + \operatorname{sh} \alpha_m) - \alpha_m \operatorname{sh}^2 \alpha_m}$$

$$C_m = \frac{4}{\pi^5 m^5} \cdot \frac{\operatorname{sh} \alpha_m}{\operatorname{ch} \alpha_m (\alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m + \operatorname{sh} \alpha_m) - \alpha_m \operatorname{sh}^2 \alpha_m}$$

将 B_m, C_m 的表达式代入式(9-60)即得最终的位移函数

$$w = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \cdot \left[1 - \frac{(\alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m + \operatorname{sh} \alpha_m) \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}}{\operatorname{ch} \alpha_m (\alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m + \operatorname{sh} \alpha_m) - \alpha_m \operatorname{sh}^2 \alpha_m} + \frac{\operatorname{sh} \alpha_m}{\operatorname{ch} \alpha_m (\alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m + \operatorname{sh} \alpha_m) - \alpha_m \operatorname{sh}^2 \alpha_m} \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (9-61)$$

将 $x=a/2, y=0$ 代入上式, 即得所要求的板中心处的挠度

$$w_{\max} = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left[1 - \frac{\alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m + \operatorname{sh} \alpha_m}{\operatorname{ch} \alpha_m (\alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m + \operatorname{sh} \alpha_m) - \alpha_m \operatorname{sh}^2 \alpha_m} \right] \sin \frac{m\pi}{2} \quad (9-62)$$

此级数收敛很快,取 $m=1$ 即可得较满意的近似解,即

$$w_{\max} = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \left[1 - \frac{\alpha_1 \operatorname{ch} \alpha_1 + \operatorname{sh} \alpha_1}{\operatorname{ch} \alpha_1 (\alpha_1 \operatorname{ch} \alpha_1 + \operatorname{sh} \alpha_1) - \alpha_1 \operatorname{sh}^2 \alpha_1} \right] \quad (9-63)$$

对于方板,即 $a=b$ 时,则 $\alpha_1 = \pi/2$, 得

$$\operatorname{ch} \alpha_1 = \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} = 2.507, \quad \operatorname{sh} \alpha_1 = \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} = 2.299$$

将这些值代入式(9-63),得

$$w_{\max} = 0.00192 \frac{qa^4}{D} \quad (9-64)$$

§ 9-6 圆板的轴对称弯曲

计算圆板弯曲问题时,采用极坐标 (ρ, φ) 较为方便。下面我们导出圆板轴对称弯曲的单元体的静力平衡方程。轴对称的意思是指板的几何形状、外荷载及边界条件都对称于经过圆心垂直于中面的轴线。因而,位移场、应变场也都是轴对称的,各分量不随 φ 变化而只是 ρ 的函数。于是,问题可大为简化。

考虑圆板的一个微小单元 $abcd$ (图 9-18), 在轴对称条件下的平衡,取坐标系如图 9-18 所示。则微小单元 $abcd$ 上的力矩方程在略去高次项后为

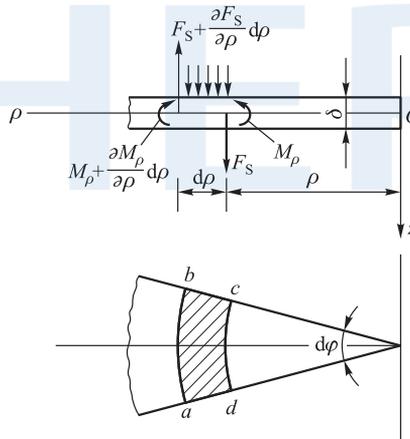


图 9-18

$$\left(M_\rho + \frac{dM_\rho}{d\rho} d\rho \right) (\rho + d\rho) d\varphi - M_\rho \rho d\varphi - M_\varphi d\rho d\varphi + F_S \rho d\rho d\varphi = 0$$

化简得

$$\rho \frac{dM_\rho}{d\rho} + M_\rho - M_\varphi = -F_s \rho \quad (9-65)$$

或

$$(\rho M_\rho)' - M_\varphi = - \int_0^\rho q \rho d\rho \quad (9-65')$$

此处 $(\dots)' = d(\dots)/d\rho$, q 为分布荷载强度。

现在来讨论圆板变形后的挠曲面的曲率。对圆板的挠曲面来说,任一点 A 的曲率可用径向与周向的曲率来描述。其中径向曲率 κ_ρ , 实际上就是包含 z 轴在内的竖直平面与挠曲面的交线 s 的曲率, 图 9-19 给出了过任意点 A 的 s 线, n 为 A 点的法线, 且交 z 轴于 B 点。设临近于 A 有一点 A' , 其法线为 n' , 如图 9-20 所示, 设 A 的转角为 φ , 可得

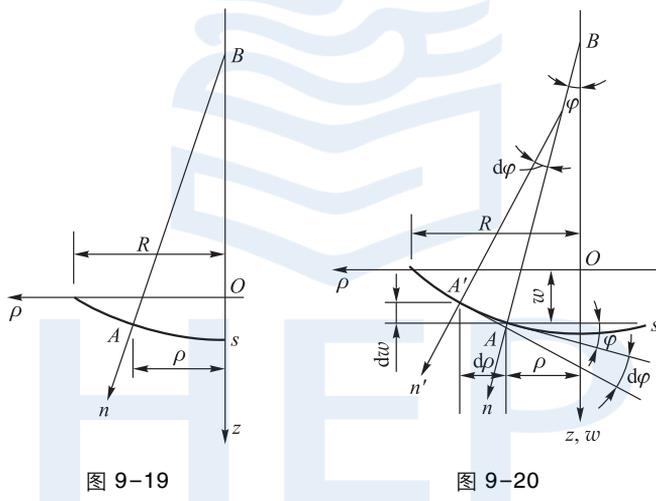


图 9-19

图 9-20

$$\tan \varphi = - \frac{dw}{d\rho}$$

在小挠度的情况下, 有

$$\tan \varphi \approx \varphi, \quad \varphi = - \frac{dw}{d\rho}$$

曲线 s 的曲率等于 $\frac{d\varphi}{ds}$, 此处 ds 为弧长的微分, 在小挠度情况下 $ds \approx d\rho$, 曲率 κ_ρ 为

$$\kappa_\rho = \frac{d\varphi}{d\rho}$$

或

$$\kappa_\rho = -\frac{d^2 w}{d\rho^2} \quad (9-66)$$

过 A 点含有 n 且与上述平面正交的平面称为法截面,它与挠曲线的交线 t 的曲率即轴向曲率 κ_φ 。

为了确定曲线 t 的曲率,可分析图 9-21 中给出的法截面 T ,由微分几何知道,曲面法截面的曲率等于任意截面的曲率乘以这两平面夹角的余弦。已知圆周的曲率为 $1/\rho$,于是,交线 t 的曲率为

$$\kappa_\varphi = \frac{1}{\rho} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \approx \frac{1}{\rho} \varphi$$

即

$$\kappa_\varphi = -\frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \quad (9-67)$$

由于轴对称弯曲,故扭率等于零, $\kappa_\rho, \kappa_\varphi$ 便是 2 个主曲率。也就是说,我们有了曲率位移关系式(9-66)和式(9-67)。

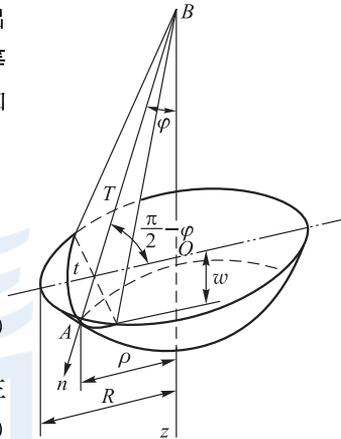


图 9-21

当圆板受分布轴对称荷载时,即荷载只是 ρ 的函数 $q(\rho)$,则问题可大为简化。事实上,式(9-24)可简化为如下形式:

$$D\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}\right)\left(\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho}\right) = q(\rho) \quad (9-68)$$

这一方程式的解可由齐次解 w_1 和特解 w_2 所组成。故其通解为

$$w = w_1 + w_2 \quad (a)$$

其中

$$w_1 = C_1 \ln \rho + C_2 \rho^2 \ln \rho + C_3 \rho^2 + C_4 \quad (b)$$

式中之常数 C_1, C_2, C_3, C_4 根据边界条件确定,特解 w_2 由荷载分布的具体情况而定,当圆板板面上满布有连续的均布荷载时,即 q 等于常数 q_0 ,其特解为

$$w_2 = C\rho^4 \quad (c)$$

将式(c)代入式(9-68),即可求得

$$C = \frac{q_0}{64D}$$

其通解即为

$$w = C_1 \ln \rho + C_2 \rho^2 \ln \rho + C_3 \rho^2 + C_4 + \frac{q_0 \rho^4}{64D} \quad (9-69)$$

对于完整的中心并无圆孔削弱的圆板,常数 C_1, C_2 必须为零,否则在板的中心($\rho=0$)处,挠度将为无穷大,这与问题的实际情况不符。常数 C_3 和 C_4 可由边界条件确定。以下研究两种情况的解。

(1) 固定边界:半径为 a ,周界固定的圆板,其边界条件为

$$(w)_{\rho=a} = 0, \quad \left(\frac{dw}{d\rho}\right)_{\rho=a} = 0$$

由式(9-69)可知

$$w = C_3\rho^2 + C_4 + \frac{q_0\rho^4}{64D} \quad (d)$$

代入边界条件

$$a^2 C_3 + C_4 + \frac{q_0 a^4}{64D} = 0, \quad 2a C_3 + \frac{q_0 a^3}{16D} = 0$$

则得

$$C_3 = -\frac{q_0 a^2}{32D}, \quad C_4 = \frac{q_0 a^4}{64D}$$

代入式(d),得

$$w = \frac{q_0 a^4}{64D} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)^2 \quad (9-70)$$

在板中心的最大挠度为

$$w_{\max} = \frac{q_0 a^4}{64D}$$

有了挠度表达式,即可求出类似于式(9-16)、式(9-18)等用挠度表示的内力公式,即求出用极坐标表示的弯矩和扭矩的方程。因为在轴对称情况下,直角坐标与极坐标有下列表达式:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{d^2 w}{d\rho^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$$

所以

$$\left. \begin{aligned} M_\rho &= -D \left(\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right) \\ M_\varphi &= -D \left(\frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} + \nu \frac{d^2 w}{d\rho^2} \right) \\ M_{\rho\varphi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9-71)$$

在轴对称情况下,剪力 F_s 很容易求得,它等于分布在半径为 ρ 的圆周内的总荷载除以 $2\pi\rho$ 。因有



[标注 9-2:
极坐标系下内力
表达式的推导]

$$2\pi\rho F_s = \int_0^{\rho} 2\pi\rho q d\rho$$

故

$$F_s = \frac{1}{2\pi\rho} \int_0^{\rho} 2\pi\rho q d\rho \quad (9-72)$$

当 $q = \text{常数}$, 则

$$F_s = \frac{q\rho}{2}$$

当周边固定的板受均布荷载作用时, 弯矩、扭矩、横向剪力的表达式即为

$$M_\rho = \frac{q_0}{16} [a^2(1+\nu) - \rho^2(3+\nu)]$$

$$M_\varphi = \frac{q_0}{16} [a^2(1+\nu) - \rho^2(1+3\nu)]$$

$$M_{\rho\varphi} = 0$$

$$F_s = \frac{1}{2} q\rho$$

最大弯矩在板的中心处, 当 $\nu = 0.3$ 时, 有

$$(M_\rho)_{\max} = (M_\varphi)_{\max} = \frac{1.3}{16} q_0 a^2 = 0.081 \ 3q_0 a^2$$

(2) 简支边界: 边界为简支的圆板受均布荷载作用时, 则当 $\rho = a$ 时, 有

$$w = 0, \quad M_\rho = -D \left(\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right) = 0$$

由这两个条件可以确定

$$C_3 = -\frac{(3+\nu)q_0 a^2}{32(1+\nu)D}, \quad C_4 = -\frac{(5+\nu)q_0 a^4}{64(1+\nu)D}$$

并可求得挠度表达式为

$$w = \frac{q_0}{64D} \left[(a^2 - \rho^2)^2 + \frac{4a^2(a^2 - \rho^2)}{1+\nu} \right] \quad (9-73)$$

弯矩的表达式

$$\left. \begin{aligned} M_\rho &= \frac{q_0}{16} [a^2(3+\nu) - \rho^2(3+\nu)] \\ M_\varphi &= \frac{q_0}{16} [a^2(3+\nu) - \rho^2(1+3\nu)] \end{aligned} \right\} \quad (9-74)$$

最大弯矩出现在板的中心处。当 $\nu = 0.3$ 时, 有

$$(M_\rho)_{\max} = (M_\varphi)_{\max} = \frac{3.3}{16} q_0 a^2 = 0.206 q_0 a^2$$

约等于固定边圆板中心弯矩的 2.5 倍。

本章复习要点

1. 薄板是指板厚 δ 与板的最小边长 b 满足下列关系式

$$\left(\frac{1}{100} \sim \frac{1}{80} \right) \leq \frac{\delta}{b} \leq \left(\frac{1}{8} \sim \frac{1}{5} \right)$$

不然则属于厚板或薄膜。厚板理论要比薄板理论复杂得多,薄板理论因基尔霍夫-勒夫假定得到了很大的简化。

2. 薄板的平衡方程,在直角坐标系中为

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = q$$

其中 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$,而在极坐标 (ρ, φ) (轴对称情况) 中为

$$D \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) \left(\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right) = q(\rho)$$

3. 板的边界条件的各种类型(见表 9-1)。注意每一个边界条件必须是独立的。独立的边界条件不能多也不能少。

4. 矩形板的经典解法——莱维解是采用下列形式

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

它是半幅的单傅里叶正弦级数。 w 应取

$$w = w_1 + w_2$$

w_1 应满足平衡方程的齐次解, w_2 满足特解, 即

$$\nabla^2 \nabla^2 w_1 = 0, \quad D \nabla^2 \nabla^2 w_2 = q(x, y)$$

5. 圆板的平衡方程(在轴对称情况)有两种形式:

- (1) 以内力为未知函数表示;
- (2) 以挠度为未知函数表示。

思考题

- 9-1 薄板理论的基本假定在哪些方面使问题得到简化? 为什么?
- 9-2 板(矩形板)的每个边的边界条件有几个? 为什么?

- 9-3 能否给出四角点支承的矩形板的边界条件?
 9-4 以圆板为例,当用内力作为未知函数求解时,需要哪些方程和条件?

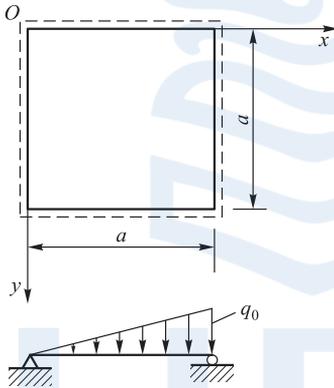
习 题

- 9-1 写出用应力 $\sigma_x, \sigma_y, \dots$ 表示的板的平衡方程。
 9-2 证明在极坐标系内下式成立:

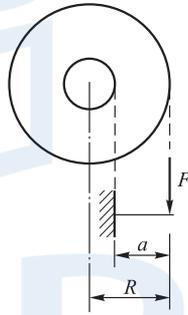
$$F_{S\rho} = \frac{\partial M_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial M_\varphi}{\rho \partial \varphi}, \quad F_{S\varphi} = \frac{\partial M_\varphi}{\rho \partial \varphi} + \frac{\partial M_\rho}{\partial \rho}$$

- 9-3 试求图示方板的最大挠度。

答案: $w_{\max} = 0.002\ 03 \frac{q_0 a^4}{D}$ 。



题 9-3 图



题 9-4 图

- 9-4 求图示环板在周边荷载作用下的最大挠度。设 $R/a = 1.5, \nu = 0.3$, 板厚 δ 。

答案: $w_{\max} = 0.209 \frac{FR^2}{E\delta^3}$ 。

- 9-5 详细推导板的总势能 E_1 的公式。
 9-6 试证在薄板问题中, $\delta U = 0$ 与 $D \nabla^2 \nabla^2 w = q$ 及边界条件等价。

§ 10-1 布西内斯克问题

本节将介绍求在弹性半空间表面受集中力作用下的应力场和位移场的问题。这一问题的解答是布西内斯克(Boussinesq, J. V.) 1885年首先给出的, 故常称为布西内斯克问题。

该问题在研究地基土体中应力分布、基础沉陷等问题中有重要应用价值, 同时在研究弹性接触问题时, 也将借助于布西内斯克问题的解答。

现在观察弹性半空间表面受集中力 F 作用的问题(图 10-1)。根据问题的特点, 显然可将其视为轴对称空间问题。于是, 可采用柱坐标系(图 10-1)来进行讨论。直角坐标系内一点 M 的位置用 x, y, z 表示, 而在柱坐标系内则用 ρ, φ, z 表示。空间同一点上的直角坐标与柱坐标之间的关系为

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z$$

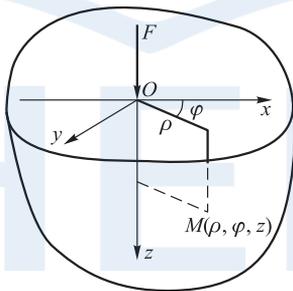


图 10-1

而应力分量、应变分量和位移分量, 则分别用 $\sigma_\rho, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{\rho\varphi}, \dots, \tau_{z\varphi}; \varepsilon_\rho, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_z, \gamma_{\rho\varphi}, \dots, \gamma_{z\varphi}$ 和 u, v, w 表示。对于半无限空间来说, 半平面的任一垂线都是几何轴对称线, 因此图 10-1 中的 z 轴为对称轴, 故

$$u = u(\rho, z), \quad v = 0, \quad w = w(\rho, z)$$

从而

$$\gamma_{\rho\varphi} = \gamma_{z\varphi} = \tau_{\rho\varphi} = \tau_{z\varphi} = 0$$

其他应力分量和应变分量均与 φ 无关, 而仅为 ρ, z 的函数。此时, 空间任一微元

体 $MABCDEF$ 的应力状态,如图 10-2 所示。由此可得平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\varphi}{\rho} + F_\rho &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} + F_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10-1)$$

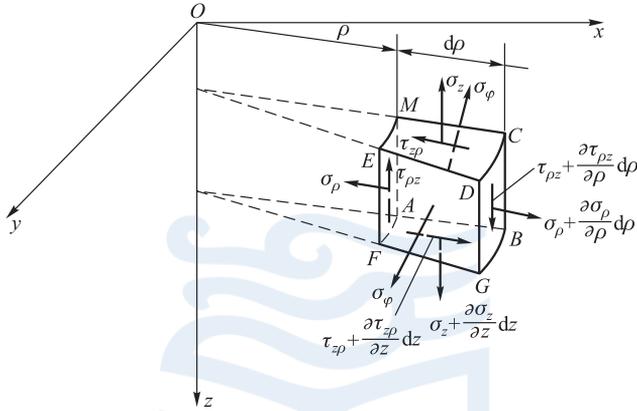


图 10-2

由该微小单元 $MABCDEF$ 的轴对称变形状态(图 10-3),可得应变位移关系式

$$\varepsilon_\rho = \frac{\partial u}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{\rho}, \quad \gamma_{\rho z} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \quad (10-2)$$

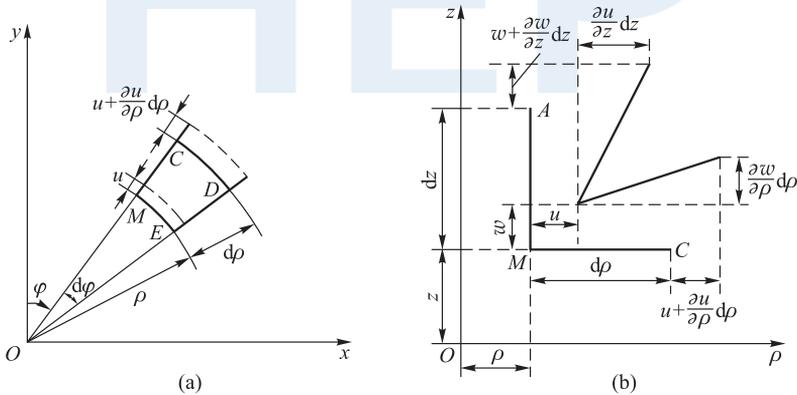


图 10-3

相应的本构方程为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \theta + \varepsilon_\rho \right) \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \theta + \varepsilon_\varphi \right) \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \theta + \varepsilon_z \right) \\ \tau_{\rho z} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{\rho z} \\ \theta &= \varepsilon_\rho + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z \end{aligned} \right\} \quad (10-3)$$

上述问题的解可有多种方法,今介绍用位移法求解。为此,将平衡方程改写为用位移分量表示的形式,即将式(10-2)代入式(10-3),将其结果再代入(10-1),可得

$$\left. \begin{aligned} G \left(\frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \nabla^2 u - \frac{u}{\rho^2} \right) + F_{b\rho} &= 0 \\ G \left(\frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \nabla^2 w \right) + F_{bz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10-4)$$

其中,拉普拉斯算子为

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

若不计体力,则得

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \nabla^2 u - \frac{u}{\rho^2} &= 0 \\ \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \nabla^2 w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10-5)$$

现在,问题化为如何连同边界条件求解方程组(10-5)。为此,可借助勒夫位移函数求解。采用勒夫位移函数的目的是令选定的函数 ψ 能使位移表达式代入式(10-5)后,式(10-5)化为 ψ 的双调和方程。即使位移分量为

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2G} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial z} \\ w &= \frac{1}{2G} \left[2(1-\nu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi \end{aligned} \right\} \quad (10-6)$$

将式(10-6)代入式(10-5),得函数 $\psi(\rho, z)$ 的双调和方程。于是,问题便归结为在给定边界条件下求双调和函数 $\psi(\rho, z)$ 。由此可见,选取位移函数是重要的。

为此,可以利用应力分量的量纲分析来确定勒夫位移函数 $\psi(\rho, z)$ 的可能形式。

已知应力分量的表达式为外力 F 乘以 ρ, z, R 等长度坐标的负二次幂,位移分量为长度坐标的负一次幂,注意到应变分量与位移分量之间以及应变分量与应力分量之间关系,可由式(10-6)看出,位移函数 $\psi(\rho, z)$ 应为 ρ, z 的正一次幂的双调和函数。于是,取

$$\psi(\rho, z) = AR + B[R - z \ln(R + z)] \quad (10-7)$$

其中

$$R = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

将式(10-6)依次代入式(10-2)和式(10-3)后,可得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right) \psi \\ \sigma_\varphi &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \psi \\ \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \nu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi \\ \tau_{\rho z} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left[(1 - \nu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi \end{aligned} \right\} \quad (10-8)$$

将式(10-7)分别代入式(10-6)和式(10-8),即得位移和应力分量的仅含待定常数 A 和 B 的表达式,利用边界条件

$$(\sigma_z)_{z=0, R=\rho} = 0, \quad (\tau_{\rho z})_{z=0, R=\rho} = 0 \quad (10-9)$$

及下列平衡条件

$$F = - \int_0^\infty 2\sigma_z \pi \rho d\rho \quad (10-10)$$

确定常数 $A \left(= \frac{F}{2\pi} \right)$ 及 $B \left[= -(1-2\nu) \frac{F}{2\pi} \right]$ 后,可得

$$\left. \begin{aligned} u &= - \frac{F(1+\nu)\rho}{2\pi ER^2} \left[(1-2\nu) \frac{R}{R+z} - \frac{z}{R} \right] \\ v &= 0 \\ w &= \frac{F(1+\nu)}{2\pi ER} \left[2(1-\nu) + \frac{z^2}{R^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (10-11)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\rho} &= \frac{F}{2\pi R^2} \left[(1-2\nu) \frac{R}{R+z} - \frac{3\rho^2 z}{R^3} \right] \\ \sigma_{\varphi} &= -\frac{F}{2\pi R^2} (1-2\nu) \left(\frac{R}{R+z} - \frac{z}{R} \right) \\ \sigma_z &= -\frac{3F}{2\pi R^2} \frac{z^3}{R^3} \\ \sigma_{\rho z} &= -\frac{3F}{2\pi R^2} \frac{\rho z^2}{R^3} \end{aligned} \right\} \quad (10-12)$$

此处 u, v, w 分别为沿 ρ, φ, z 方向的位移。由方程(10-11)可见, 在任一 $z/\rho = \text{常数}$ 的直线上, 位移与距原点的距离成反比, 当 $R \rightarrow \infty$ 时, 位移趋于零。而在 $z=0$ 平面上, 竖向位移 w 为

$$w \Big|_{z=0} = \frac{F(1-\nu^2)}{\pi E \rho}$$

上式在除原点附近之外的各点都是正确的。

以上的结果, 可以推广到在一定表面域上有分布荷载作用的情况。

例如, 在半空间表面 $z=0$ 上, 受半径为 a 的圆形域分布荷载 q 作用, 现在考察物体表面距圆心为 ρ 的一点 M 沿荷载方向的位移, 如图 10-4 所示, 其中阴影单元面上的荷载为 $qsds$, 故 M 点的总位移为

$$w = \frac{(1-\nu^2)q}{\pi E} \iint dsd\psi$$

对 s 积分, 弦 mn 的长度为 $2\sqrt{a^2 - \rho^2 \sin^2 \psi}$, 且有

$$a \sin \varphi = \rho \sin \psi$$

当 ψ 从 $-\frac{\pi}{2}$ 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时, 弦 mn 扫过整个圆的面积, 由对称性, 得

$$w = \frac{4(1-\nu^2)qa}{\pi E} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{a^2} \sin^2 \psi} d\psi$$

对 ρ/a 的任何值, 都容易利用椭圆积分表算出 w 。则在 $z=0$ 的表面, 圆形区域中心一点处竖向位移 w 为

$$(w)_{z=0} = \frac{2(1-\nu^2)}{E} qa \quad (10-13)$$

如果所讨论的点 M 是在该受荷载作用区域以外, 则考虑到在荷载面积内取一微小单元面积, 该微面是由以 M 点为中心而半径各为 s 和 ds 的两圆弧与夹角为

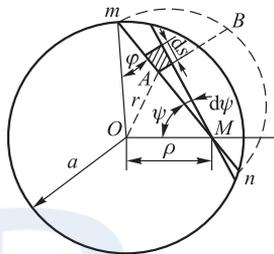


图 10-4

$d\psi$ 的两半径所围成。于是, M 点的竖向位移不难求出为^①

$$(w)_{z=0} = \frac{(1-\nu^2)q}{\pi E} \iint ds d\psi \quad (10-14)$$



Boussinesq, J.V. (1842—1929)

布西内斯克 (Boussinesq, J.V.) 是一位著名的法国力学家、物理学家和数学家, 他于 1842 年 3 月生于法国, 1929 年 2 月卒于巴黎, 享年 87 岁。1872 年至 1886 年任里尔大学科学系教授, 讲授微积分; 1886 年至退休任巴黎科学院的力学教授。半无限弹性体表面受集中力作用的问题是他首先给出了精确解, 故称该问题为布西内斯克问题。

§ 10-2 赫兹接触问题

赫兹 (Hertz, H. R.) 1881 年研究了弹性球体的接触应力问题 (图 10-5), 即赫兹接触问题。两球体的半径分别为 R_1, R_2 , 在球中心均受力 F 作用, 两球在 O 点相切。变形前两球面上距公法线的距离为 ρ 的 A_1 和 A_2 点间的距离为

$$\xi_1 + \xi_2 \approx \frac{\rho^2}{2R_1} + \frac{\rho^2}{2R_2} = \beta \rho^2 \quad (10-15)$$

其中

$$\beta = \frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2}$$

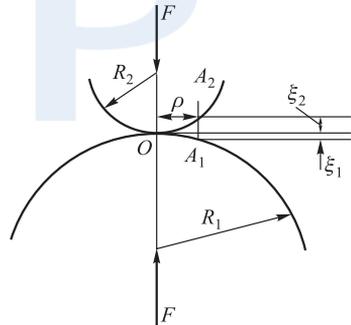


图 10-5

^① 详见文献[17]。

现在假定距两球体接触点的中线足够远的两点,因相互压缩而相互接近的距离为 δ , 而 A_1 和 A_2 点此时所发生的相向位移分别为 w_1 和 w_2 , 于是有

$$w_1 + w_2 = \delta - \beta \rho^2$$

若将接触面视为弹性半空间表面受圆形域荷载作用, A_1 点表示下面球在接触面上的一点, 于是由式(10-14)有

$$w_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} \iint q \, ds \, d\psi \quad (10-16)$$

其中 E_1, ν_1 为下面球的弹性模量和泊松比, 类似地可得 w_2 及

$$w_1 + w_2 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) \iint q \, ds \, d\psi = \delta - \beta \rho^2 \quad (10-17)$$

现在问题归结为求满足积分方程(10-17)的未知函数 q 。赫兹得出, $q(\rho)$ 应与接触圆上的半球面的纵坐标成正比。赫兹给出

$$q(\rho) = \frac{q_{\max}}{a} \sqrt{a^2 - \rho^2} \quad (10-18)$$

其中 q_{\max} 为接触圆中心点 O 处的压力, $r = |OA|$ (图 10-4)。为了验证上述关系式, 可将式(10-18)代入式(10-17)积分。此处 mn 的长度为

$$2\sqrt{a^2 - \rho^2 \sin^2 \psi}$$

于是

$$\int q(\rho) \, ds = \frac{q_{\max}}{a} \frac{\pi}{2} (a^2 - \rho^2 \sin^2 \psi) \quad (10-19)$$

$$\iint q(\rho) \, ds \, d\psi = \frac{\pi^2 q_{\max} (2a^2 - \rho^2)}{4a} \quad (10-20)$$

将式(10-20)代入式(10-17)后, 整理后得

$$\delta = \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) \frac{\pi a q_{\max}}{2} \quad (10-21)$$

$$\beta = \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) \frac{\pi \rho^2 q_{\max}}{4a} \quad (10-22)$$

于是可得

$$q_{\max} = \frac{3F}{2\pi a^2} \quad (10-23)$$

由式(10-22), 得



[标注 10-1:
赫兹假设]

$$a = \sqrt[3]{\frac{3FR_1R_2}{4(R_1 + R_2)} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)} \quad (10-24)$$

$$q_{\max} = \sqrt[3]{\frac{6F(R_1 + R_2)^2}{\pi^3 R_1^2 R_2^2 \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)}} \quad (10-25)$$

若 $E_1 = E_2 = E, \nu_1 = \nu_2 = 0.3$, 则得

$$q_{\max} = 0.388 \sqrt[3]{\frac{FE^2(R_1 + R_2)^2}{R_1^2 R_2^2}} \quad (10-26)$$

$$a = 1.11 \sqrt[3]{\frac{FR_1R_2}{E(R_1 + R_2)}} \quad (10-27)$$

$$\delta = 1.23 \sqrt[3]{\frac{F^2(R_1 + R_2)}{E^2 R_1 R_2}} \quad (10-28)$$

从而可进一步求出球体中的应力场。最大压应力发生在接触面中心, 即 q_{\max} 值, 最大拉应力发生在接触面边界上, 其值为 $0.133q_{\max}$ 。最大切应力发生在公共法线上距 O 点 $0.47a$ 附近, 其值为 $0.31q_{\max}$ 。

如果球体与平面接触, 只须令 $R_1 \rightarrow \infty$ 即可; 如果球体与凹面球座接触, 只须令 R_1 取负值即可。



Hertz, H.R. (1857—1894)

赫兹 (Hertz, H.R.), 德国物理学家。频率的单位赫 (兹) 即为纪念他而命名。1857年2月22日生于汉堡, 1894年1月1日在波恩病逝。1880年获哲学博士学位。1889年他任波恩大学的物理教授, 研究了两物体相触后产生的局部应力和应变分布的规律, 称为赫兹接触问题。

§ 10-3 简单热应力问题

弹性体因所处环境的温度变化就将引起物体的膨胀和收缩,并相伴产生应力,这种应力称为热应力。对于某些在温度变化环境中工作的结构和构筑物,其热应力是不容忽视的,本节将以简例扼要说明热应力的分析思路。

设有一各向同性弹性立方体,三个坐标方向的尺寸相同,均为 a ,则在均匀温度下受热而发生膨胀,这时各方向伸长后的尺寸应均为 αa ,此处 α 称为线胀系数。于是,对一直径为 d ,长为 l 的直杆当温度变化为 T 时,则长度方向的应变 $\varepsilon_l = \alpha T l / l = \alpha T$ 。同样地,沿径向的应变 $\varepsilon_d = \alpha T$ 。

物体所处环境内的温度往往是随时间、空间位置变化的,其所处的空间称为温度场,在直角坐标中,温度场为

$$T = T(x, y, z, t)$$

不随时间变化的 T 称定常温度场 ($\partial T / \partial t = 0$),即热源强度 $W = 0$,否则是非定常温度场。温度场是一种数量场。热量的传递引起温度的变化,也就是温度梯度的变化。若单位时间、单位面积上传递的热量定义为热流密度,显然热流密度与温度梯度成正比,但方向相反,这一规律称为傅里叶定律。

下面给出平面热应力问题的基本关系式:

平面热应力问题和等温度情况的平衡方程和几何方程形式一样,而平面应力的本构关系为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) + \alpha T \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) + \alpha T \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (10-29)$$

平面应变问题的本构关系为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y\right) + (1+\nu)\alpha T \\ \varepsilon_y &= \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x\right) + (1+\nu)\alpha T \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (10-30)$$

下面给出受热管道及坝体热应力的分析例子。

一、受热管道的热应力

下面讨论受热厚管的应力分析。设管的半径为 a , 管内增温为 T_a , 管外增温为零, 管内无热源时管内热应力为零。由于管为定常温度场, 由热传导方程知^①

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad \nabla^2 T = 0 \quad (10-31)$$

此为轴对称温度场, 故有

$$\frac{d^2 T}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dT}{d\rho} = 0 \quad (10-32)$$

积分, 得

$$T = A \ln \rho + B$$

边界条件

$$T|_{\rho=a} = T_a$$

$$T|_{\rho=b} = 0$$

可得

$$A = \frac{1}{\ln a - \ln b} T_a, \quad B = \frac{-\ln b}{\ln a - \ln b} T_a \quad (10-33)$$

$$T = \frac{\ln b - \ln \rho}{\ln b - \ln a} T_a \quad (10-34)$$

由轴对称平面应变问题, 有

$$w = 0, \quad u_\rho = u_\rho(\rho) \quad (10-35)$$

则有

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0 \quad (10-36)$$

$$\varepsilon_\rho = \frac{du_\rho}{d\rho}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_\rho}{\rho} \quad (10-37)$$

^① 由热力学第一定律可导出, 当 $W=0, \partial T/\partial t=0$ 时, 可导出 $\nabla^2 T=0$, 详见参考文献[19]。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \varphi + \varepsilon_\rho \right) - \frac{\alpha ET}{1-2\nu} \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \varphi + \varepsilon_\varphi \right) - \frac{\alpha ET}{1-2\nu} \\ \sigma_z &= \frac{E\nu\varphi}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{\alpha ET}{1-2\nu} \\ \varphi &= \varepsilon_\rho + \varepsilon_\varphi \end{aligned} \right\} \quad (10-38)$$

将以上两式代入平衡方程,得

$$\frac{d^2 u_\rho}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du_\rho}{d\rho} - \frac{u_\rho}{\rho^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \frac{dT}{d\rho} \quad (10-39)$$

引入热弹性势 $\Phi(\rho)$,使得

$$u_\rho = \frac{d\Phi}{d\rho} \quad (10-40)$$

注意到

$$\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) \quad (10-41)$$

并计及式(10-34),可得一个特解

$$\Phi = \frac{\beta \rho^2}{\ln b - \ln a} (\ln b - \ln \rho + 1), \quad \beta = \frac{1+\nu}{4(1-\nu)} \alpha T$$

不难写出相应的应力为

$$\bar{\sigma}_\rho = -2G \frac{d\Phi}{\rho d\rho}, \quad \bar{\sigma}_\varphi = -2G \frac{d^2\Phi}{d\rho^2} \quad (10-42)$$

于是可得该特解对应的应力分量

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_\rho &= -\frac{2G\beta}{\ln b - \ln a} \left(2\ln \frac{b}{\rho} + 1 \right) \\ \bar{\sigma}_\varphi &= -\frac{2G\beta}{\ln b - \ln a} \left(2\ln \frac{b}{\rho} - 1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (10-43)$$

在上式中,令 $\rho=a, \rho=b$ 代入后,得到

$$(\sigma'_\rho)_{\rho=a} = -p_1, \quad (\sigma'_\rho)_{\rho=b} = -p_2 \quad (10-44)$$

显然,该解不满足圆筒内外壁面力为零的条件,故应消去管内外的 $-p_1$ 和 $-p_2$,式(10-39)的齐次解对应于厚壁圆筒问题式(6-62),相应的解为式(6-62),将其叠加到式(10-43)上,最终可得管内热应力为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho &= -\frac{\alpha E T_a}{2(1-\nu)} \left[\frac{\ln b - \ln \rho}{\ln b - \ln a} - \frac{(b/\rho)^2 - 1}{(b/a)^2 - 1} \right] \\ \sigma_\varphi &= -\frac{\alpha E T_a}{2(1-\nu)} \left[\frac{\ln b - \ln \rho - 1}{\ln b - \ln a} + \frac{(b/\rho)^2 + 1}{(b/a)^2 - 1} \right] \end{aligned} \right\} \quad (10-45)$$

二、坝体热应力

现在研究顶角为 2β 的楔形坝体的内部热应力问题(图 10-6)。

坝体中的热应力是一个重要的工程实际问题。但问题比较复杂,引起温度变化的因素较多,这里只考虑一种楔形坝体的中心线上的温度变化为 T_0 , 两侧边上的变化为零,内部变化按下列公式的规律而变化的情况

$$T = \frac{\cos \varphi - \cos \beta}{1 - \cos \beta} T_0 \quad (10-46)$$

这一问题属平面应变问题(图 10-6),在此先按平面应力问题计算。由平面应力问题位移法,热弹性势 Φ 满足

$$\nabla^2 \Phi = (1+\nu) \alpha T$$

即

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial}{\rho \partial \rho} + \frac{\partial^2}{\rho^2 \partial \varphi^2} \right) \Phi = (1+\nu) \alpha T_0 \frac{\cos \varphi - \cos \beta}{1 - \cos \beta} \quad (10-47)$$

取弹性势函数为

$$\Phi = \rho^2 (c_1 \cos \varphi + c_2) \quad (10-48)$$

将上式(10-48)代入式(10-47),得

$$3c_1 \cos \varphi + 4c_2 = (1+\nu) \alpha T_0 \frac{\cos \varphi - \cos \beta}{1 - \cos \beta} \quad (10-49)$$

由此可得

$$c_1 = \frac{(1+\nu) \alpha T_0}{3(1 - \cos \beta)}, \quad c_2 = -\frac{(1+\nu) \alpha T_0 \cos \beta}{4(1 - \cos \beta)}$$

代入式(10-48)后,得

$$\Phi = \frac{(1+\nu) \alpha T_0 \rho^2}{(1 - \cos \beta)} \left(\frac{1}{3} \cos \varphi - \frac{1}{4} \cos \beta \right) \quad (10-50)$$

与上面的例子类似,可得特解的应力分量

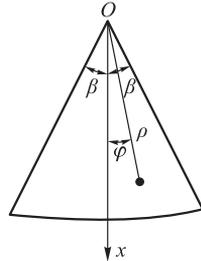


图 10-6

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_{\rho} &= k_1 \left(\frac{1}{3} \cos \varphi - k_2 \right) \\ \sigma'_{\varphi} &= k_1 \left(\frac{2}{3} \cos \varphi - k_2 \right) \\ \tau'_{\rho\varphi} &= k_1 \frac{1}{3} \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (10-51)$$

其中

$$k_1 = -\frac{E\alpha T_0}{1 - \cos \beta}, \quad k_2 = \frac{1}{2} \cos \beta$$

由此可求出在边界上的应力分量为

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_{\rho} |_{\varphi=\pm\beta} &= \frac{1}{3} k_1 k_2 \\ \tau'_{\rho\varphi} |_{\varphi=\pm\beta} &= \pm \frac{k_1 \sin \beta}{3} \end{aligned} \right\} \quad (10-52)$$

为了消除与原命题不符的应力场,类似地应叠加一相反的应力场,为此考虑应力函数

$$\Phi = \rho^2 f(\varphi) \quad (10-53)$$

因为 Φ 为双调和函数,故有

$$\Phi = \rho^2 (A \cos 2\varphi - B \sin 2\varphi + C\varphi + D) \quad (10-54)$$

由此,按平面问题一章的方法,可求得应力场 $\sigma''_{\rho}, \sigma''_{\varphi}, \tau''_{\rho\varphi}$ 后与式(10-51)叠加,计及 $\sigma_{\varphi}, \tau_{\rho\varphi}$ 在边界均为零的边界条件后,最终得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\rho} &= \frac{-k_1(\sin \varphi - \cos \beta \cos \varphi + \cos^2 \beta)}{6k_2} \\ \sigma_{\varphi} &= -\frac{k_1(\cos \varphi - \cos \beta)^2}{6k_2} \\ \tau_{\rho\varphi} &= -\frac{k_1 \sin \varphi (\cos \varphi - \cos \beta)}{6k_2} \end{aligned} \right\} \quad (10-55)$$

可见最大拉应力在边界上,其值为

$$\sigma_{\rho} |_{\varphi=\pm\beta} = \frac{k_1}{6k_2} (\cos^2 \beta - 1) \quad (10-56)$$

§ 10-4 弹性波 初等理论

物体受突加荷载作用后,其变形和相应的应力并不能立即传到物体的各个部分。在开始时刻,物体的变形,或者一般地说,物体受到的扰动,只在加载处的邻域内产生,该邻域以外的部分则仍处于未扰动的状态。之后,物体的变形和应力便以波的形式向远处传播。在荷载作用时间远小于波的传播时间的情况下,物体的运动主要表现为波的传播现象。根据介质的物理性质,边界条件和荷载的作用形式不同,波的传播过程将呈现出各种不同的特征。

本节以半无限长弹性细杆在端部受到动荷载作用为例,研究弹性应力波(弹性波)在杆内向远处传播的规律。材料的弹性模量为 E , 密度为 ρ 。设外荷载较小,使得杆端应力 $\sigma < \sigma_0$, σ_0 为动屈服极限。又设荷载为压力(图 10-7),则在杆中传播的是弹性压缩波。在此处,应力以压缩为正,于是运动方程(波动方程)为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (10-57)$$

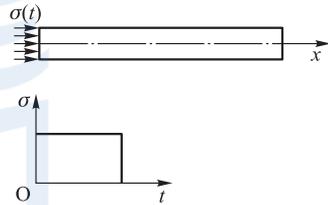


图 10-7

其中 $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ 是与应力大小无关的常数,为杆中弹性纵波的波速, u 是 x 方向的位移。对金属材料而言, c_0 的数量级为每秒几千米(横波波速一般只是纵波波速的一半)。表 10-1 中给出了若干种材料的纵波波速 c_0 的值。

应当指出,波的传播速度(简称波速)和在波传播中材料质点的运动速度是两个不同的物理量,不能相互混淆。材料的质点受到扰动后,只能在平衡位置附近运动,其运动的速度称为质点的速度。而质点将所受到的干扰相继传播到相邻质点的速度,称为波的传播速度。

表 10-1

材料	$c_0 / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	$Z_s / (10^5 \text{Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1})$
黄铜	4 300	361
铝合金	6 100	165
钢	5 800	452
有机玻璃	2 600	31
土壤	100~500	5~82

以上二阶微分方程(10-57)可以改写成与之等价的一阶偏微分方程组,

如令

$$v = \frac{\partial u}{\partial t}$$

则有

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

代入本构关系 $\sigma = -E\varepsilon = -E \frac{\partial u}{\partial x}$ 及 $c_0^2 = \frac{E}{\rho}$ 后, 上式及方程(10-57)化为

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= 0 \\ \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 1/E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{,t} \\ \sigma_{,t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{,x} \\ \sigma_{,x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

或缩写为

$$\mathbf{A} \mathbf{W}_{,t} + \mathbf{B} \mathbf{W}_{,x} = 0$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 1/E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} v \\ \sigma \end{pmatrix}$$

今后可看到, 质点的运动速度与瞬时应力成正比, 它比波速要小得多, 并且可从方程(10-57)的解直接得到。实际上, 在所讨论问题的情况下(半无限长细杆在端部受到动力作用, 没有反向波), 方程(10-57)的解为

$$u = f(x - c_0 t) \quad (10-58)$$

于是有

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\partial u}{\partial x} = f'(x - c_0 t) \\ \sigma &= -E\varepsilon = -E f'(x - c_0 t) \\ v &= \frac{\partial u}{\partial t} = c_0 [-f'(x - c_0 t)] \end{aligned} \right\} \quad (10-59)$$

比较 σ 和 v 的表达式后, 得到

$$v = \frac{c_0 \sigma}{E} \quad (10-60a)$$

或者

$$\sigma = \rho c_0 v = Z_s v \quad (10-60b)$$

注意,此处规定压应力为正, $Z_s = \rho c_0$ 。式(10-60)表明:

(1) 质点的运动速度 v 与瞬时应力 σ 成正比,比例常数 Z_s 称为声阻抗率,其单位为 $\text{Pa} \cdot \text{s}/\text{m}$ 。若干材料的声阻抗率已列在表 10-1 中。

(2) 当杆端受到压力时,波的传播方向、质点的运动速度方向及应力方向一致。反之,如果杆端是受到拉力作用,波的传播方向与质点的运动速度方向及应力方向相反。

(3) 式(10-60)又可如下地解释或推导。设在 t 时刻内,杆端受到的应力是不变的,因而杆件受压缩的长度为 $c_0 t$,在 $x > c_0 t$ 的杆内,没有受到扰动。在扰动段内, $\varepsilon = \sigma/E$ 。因此,杆端的总位移为 $c_0 t \varepsilon = c_0 t \sigma/E$ 。在此时间内,杆端的位移应为 vt 。令两者相等,就得到式(10-60)。

现讨论弹性波在有限长杆端部的反射,已知方程(10-57)的一般解为

$$u(x, t) = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$$

其中, $u_1 = f_1(x - c_0 t)$ 为右行波,其波前前进路线的方程为 $x = c_0 t + \text{const}$; $u_2 = f_2(x + c_0 t)$ 为左行波,其波前前进路线的方程为 $x = -c_0 t + \text{const}$ 。对应于 u_1 和 u_2 的应力分别为

$$\sigma_1 = E \frac{\partial u_1}{\partial x} = -Z_s \frac{\partial u_1}{\partial t} = -Z_s v_1$$

$$\sigma_2 = E \frac{\partial u_2}{\partial x} = Z_s \frac{\partial u_2}{\partial t} = Z_s v_2$$

上式表明,对于右行波,应力和质点速度符号相反,即负应力对应于正速度;左行波的应力与质点速度符号相同。应力和速度之比为 $\pm Z_s$ 。

现在考虑两个相向运动的应力波,如图 10-8a 所示。应力分别为 σ_1 和 σ_2 ,符号相同。由于弹性波的控制方程为线性的,所以当两个波相遇时,其重叠部分的应力和速度可以用叠加法来计算。但应注意,这里是代数相加,要注意它们的符号。对于同号应力波相遇之后,在波形重合部分的应力为两应力波应力之和,符号不变(图 10-8b, c)而速度则为两者之差,符号与其中绝对值最大者相同。两波分离之后,则各自按原来的波形传播。如果两个相向运动的应力波应力符号相反,则两波相遇之后,其重合部分的应力为两应力之差,符号与其中绝对值最大者相同,而速度则为两者之和。两波分离之后,仍按各自的波形传播。

显然,若两个应力值相等,波的长度相同,但应力符号相反的波相遇之后,应力互相抵消,即其重叠部分的应力变为零,但其质点速度加倍。图 10-9 给出了两个异号应力波相遇时应力的变化的情况。

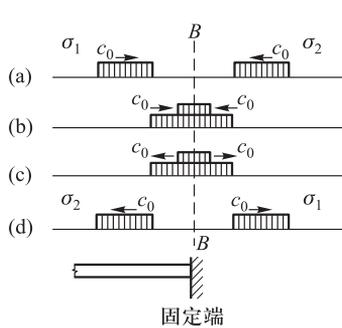


图 10-8

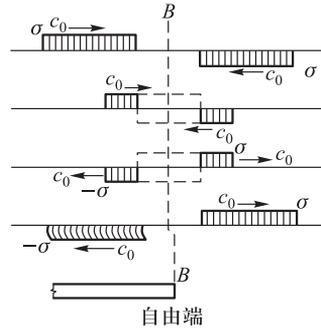


图 10-9

现在设想在 B 处(两波相遇的截面)将杆切开,则在图 10-8 所示的情况下, B 截面的应力加倍,速度为零,这相当于有限长杆的固定端;而在图 10-9 所示的情况下,则应力恒为零,这相当于有限长杆的自由端,在该处速度加倍。

由此可见,对于有限长杆,当波由扰动端(加载端) A 传播到远端 B 时,必将发生波的反射,生成反射波。这个反射波相当于从 B 端以外传来的相向运动的波。由以上讨论可知:波由固定端反射后,应力增至入射波应力的 2 倍,质点速度减为零,波的性质不变[即拉伸(压缩)波仍为拉伸(压缩)波];而波由自由端反射后,应力减至零,质点速度增为入射波质点速度的 2 倍,波的性质改变[即拉伸(压缩)波变为压缩(拉伸)波],波形不变。

在弹性介质中传播的应力波的研究无疑是空间问题,根据介质的特征将出现各种复杂的情况^①。其中主要是膨胀波(又称无旋波)和畸变波。

膨胀波波速为

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}}$$

畸变波的波速为

$$c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

显然,膨胀波波速 c_1 大于畸变波波速 c_2 。

沿弹性体表面传播的波称为表面波,又称为瑞利(Rayleigh)波,这种波在物体表面以倒转的椭圆形轨迹向远处传播。其竖向分量大于水平分量约 1.5 倍。质点振动的振幅随深度呈指数衰减,并在约 0.192 波长处质点运动的轨迹变为相反方向的椭圆,如图 10-10 所示。因此,瑞利波的波长越长,它向介质深部的穿透越深。当 $\nu = 0.25$ 时,其传播速度为

^① 见参考文献,例如[25]。

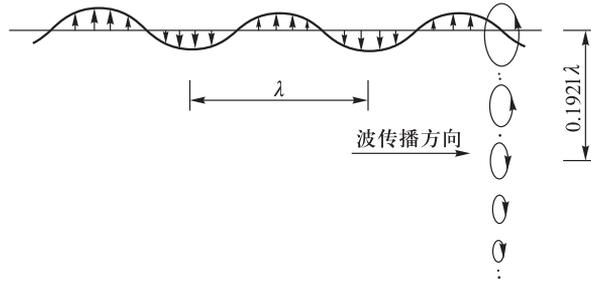
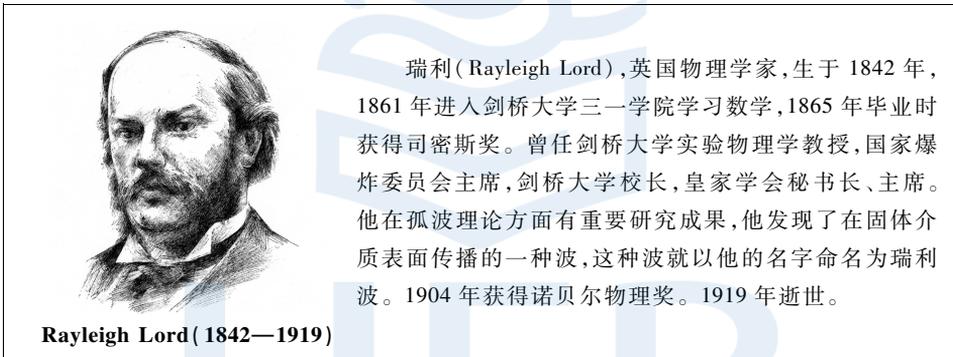


图 10-10

$$c_3 = 0.9194 \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$



在地震观测中还发现一种特殊的面波, 其质点振动平面平行于地表面, 产生于地表面上覆盖着的薄层底面, 沿分界面方向传播, 这种波称为勒夫波, 是英国科学家勒夫于 1911 年首先发现。

此外, 还有其他形式的弹性波, 非弹性波。根据扰动源、介质性质、物体形态的不同, 将出现各种复杂的, 但有趣的景象。这些在工程技术和科学研究等方面都有广泛的应用。

§ 10-5 用 MATLAB 软件计算弹性力学问题

众所周知, 科学计算软件包 MATLAB 是 Matrix Laboratory (矩阵实验室) 两个字头合成的一个计算软件新词。它具备卓越的数值计算能力, 还提供了专业

水平的符号计算、文字处理,可视化建模仿真等功能。MATLAB 的基本数据单位是矩阵,它的指令表达式与数学、工程中常用的形式十分相似,故用 MATLAB 来解算问题要比用其他语言简捷得多。

MATLAB 主包文件和各种工具包都是可读可修改的文件,用户通过对源程序的修改或加入自己编写的程序构造新的专用工具包,非常方便实用。

MATLAB 是第四代计算机语言,利用其丰富的函数资源,可使编程人员从繁琐的程序代码中解放出来。MATLAB 最突出的特点就是简洁,直观,代码符合人们的思维习惯。

详细了解 MATLAB 见附录 C,进一步学习可参见附录 C 给出的参考文献。

如前所述,弹性力学问题的数学表述,都可以归结为常微分方程 (ODE) 或偏微分方程 (PDE) 的定解问题,而许多偏微分方程问题也可以转化为常微分方程问题来求得近似解。MATLAB 为其提供了求解函数和求解器 (solver),可以实现常微分方程的解析求解和数值求解。同时通过编程还可以求其数值解。求数值解的方法很多,例如, Euler 法、Runge-Kutta 法等。MATLAB 常微分方程符号解的语法是:

```
dsolve('equation','condition')
```

(1) 求常微分方程的通解

例如,求下列微分方程的通解: $y''+2y'+e^x=0$, 即

```
>>dsolve('D2y+2 * Dy+exp(x)=0','x')
```

```
ans =
```

```
-1/3 * exp(x) - 1/2 * exp(-2 * x) * C1 + C2
```

可知通解为 $y = -\frac{1}{3}e^x - \frac{1}{2}e^{-2x}C_1 + C_2$, 此处 C_1, C_2 为常数。

(2) 用有限元法求解偏微分方程的数值解

设偏微分方程为下列 Poisson 方程:

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = f(x,y)$$

在边界上: $u(x,y) = b(x,y)$

其主要步骤为:

- 1) 将二维区域 D 划分为 n 个可不相等的区域 (s_1, s_2, \dots, s_n) ;
- 2) 在边界上确定 n 个节点, 按由外向内的顺序编号;
- 3) 定义基函数和插值函数:

$$\varphi_n(x,y) = (\varphi_{n,s}, s=1, 2, \dots, n) \quad \forall (x,y) \in D$$

$$\varphi_{n,s}(x,y) = p_{n,s}(1) + p_{n,s}(2)x + p_{n,s}(3)y$$

这样保证了 φ_n 仅在 n 节点取值为 1, 其他节点为 0。同时偏微分方程的解可由 φ_n 线性表示:

$$u(x, y) = \mathbf{c}^T \boldsymbol{\varphi}(x, y) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i = \mathbf{c}_1^T \boldsymbol{\varphi}_1 + \mathbf{c}_2^T \boldsymbol{\varphi}_2$$

其中

$$\boldsymbol{\varphi}_1 = (\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_b)^T, \mathbf{c}_1 = (c_1 c_2 \cdots c_b)^T$$

$$\boldsymbol{\varphi}_2 = (\varphi_{b+1} \varphi_{b+2} \cdots \varphi_n)^T, \mathbf{c}_2 = (c_{b+1} c_{b+2} \cdots c_n)^T$$

对于每一子域,可写为:

$$\varphi_s(x, y) = \sum_{i=1}^n c_n \varphi_{n,s}(x, y)$$

4) 根据边界条件确定 \mathbf{c}_1 中的节点系数;

5) 确定内节点的系数。

在求解偏微分方程前,应首先给出基函数的图形。可通过以下步骤实现:

(1) 通过函数 fem_basis_ftm 产生基函数,使得 φ_n 仅在 n 处取 1,其余处均为 0,产生基函数的程序:fem_basis_ftm。

调用格式:p = fem_basis_ftm(N,S)。

此处 N——节点坐标矩阵;S——子区域的节点列表矩阵,如第 i 行为第 i 个子域内的所有节点编号;p——为基函数 ftm phi_i 系数。

具体程序代码如下:

```
Function p = fem_basis_ftm(N,S)
% p(I,s,1:3): 基函数 ftm phi_i 系数
% 有 s 个子区域。% N(n,1,:2): 第 n 个节点的 x 和 y 坐标
% S(s,1:3): 第 n 个子区域的节点数 s
N_n = size(N,1): % 总节点数
N_s = size(S,1): % 总子区域个数
```

```
for n = 1:N_n
    for s = 1:N_s
        for i = 1:3
            A(i,1:3) = [1 N(S(s,i),1:2)];
            B(i) = (S(:,i) == n);
        end
        pnt = A \ b;
        for i = 1:3, p(n,s,i) = pnt(i); end
    end
end
```

```

bx0 = inline ('y ^ 2','y');
bxf = inline ('4 ^ 2 * cos (y)','y'); % 边界条件
by0 = inline ('x ^ 2','x');
byf = inline ('4 ^ 2 * cos (x)','x');
D = [x0 xf y0 yf]; MaxIter = 400; MinErr = 1e-4;
clf, mesh (x,y,U) % axis ([ 0 4 0 4 -100 100]);

```

(2) 通过函数 fem_coef 为每一个节点和子区域构造基函数 $\varphi_{n,s}(x,y)$, 求得系数向量 c , 实现每一个节点和子区域构造基函数。若令: N 为总节点数, S 为子区域节点列表矩阵, N_i 为区域内点数, c 为边界点的取值, f 为方程右边的函数, 则有

调用格式: $[U, c] = \text{fem_coef}(f, p, c, N, S, N_i)$ 。

于是, 可以类似地写出具体计算程序代码。

(3) 编程实现绘制基函数图形的函数: Show_Basis, 得出基函数图形

调用格式: Show_Basis()。

于是, 可以类似地写出相应具体计算程序代码。

由于求解偏微分方程比较复杂, MATLAB 特别准备了求解偏微分方程的工具箱 PDETOOL。可以用 PDETOOL 求解椭圆型偏微分方程、抛物线型偏微分方程、双曲线型偏微分方程和特征值型偏微分方程, 非常方便。于是, 可以用 PDETOOL 来解弹性力学边值问题。

以下将借助偏微分方程工具箱 PDETOOL, 采用有限元法求解弹性柱体扭转问题的例子。

例 10-1 给出图 10-11 中的带有中间弹性支承的简支梁受均布荷载作用下的挠曲线和内力图。

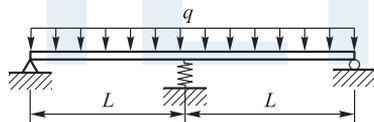


图 10-11

解: 该梁的挠曲线控制方程为 $EIw^{(4)} = q$, 这里 E 为弹性模量, I 为截面惯性矩, w 表示梁的挠度, q 为均布荷载。边界条件为:

$$w(0) = 0, EIw^{(2)}(0) = 0, w(L) = w_c, w'(L) = 0, w(2L) = 0, EIw^{(2)}(2L) = 0$$

本例中采用 dsolve 进行求解, 但 dsolve 只能求解静定问题, 即其边界条件不能为超静定, 为使该问题能够顺利求解, 将图 10-11 所示梁分解为左右两部分梁的联合, 然后再合成。求解程序如下:

```

%%%%%%%%%%

```

```

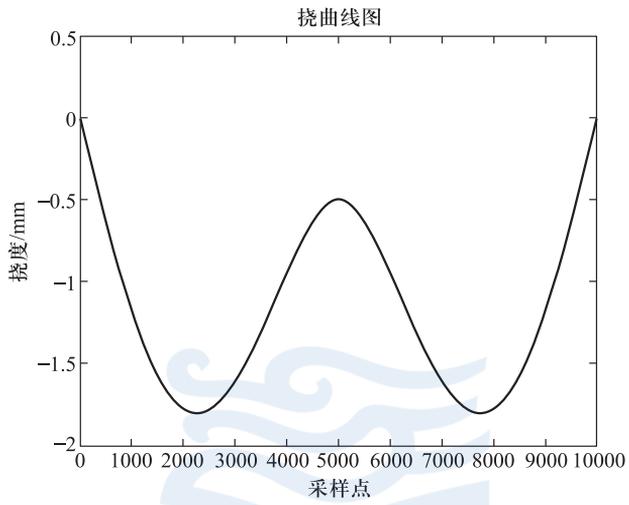
Clear all
syms Els It q L wc LII      %符号声明,Els 表示弹性模量,It 表示截面惯性
                              %矩,q 为均布荷载
                              %L 为 1/2 梁长,wc 为 中点位移,LII 表示梁的全
                              %部长度
w1=dsolve('Els * It * D4w = q','w(0) = 0,Dw(L) = 0,w(L) = wc,Els * It *
D2w(0) = 0','x');          %求解微分方程
                              %满足左部分边界条件
w2=dsolve('Els * It * D4w = q','w(LII) = 0,Dw(L) = 0,w(L) = wc,Els * It *
D2w(LII) = 0','x');       %求解微分方程满足右部
                              %分边界条件

syms x;w1;
syms x;w2;                  %变量声明
wanju1 = Els * It * diff(w1,x,2);%求左部分梁弯矩图的表达式
wanju2 = Els * It * diff(w2,x,2);%求梁右部分弯矩图的表达式
jianli1 = Els * It * diff(w1,x,3);%求梁左部分剪力图的表达式
jianli2 = Els * It * diff(w2,x,3);%求右部分梁剪力图的表达式

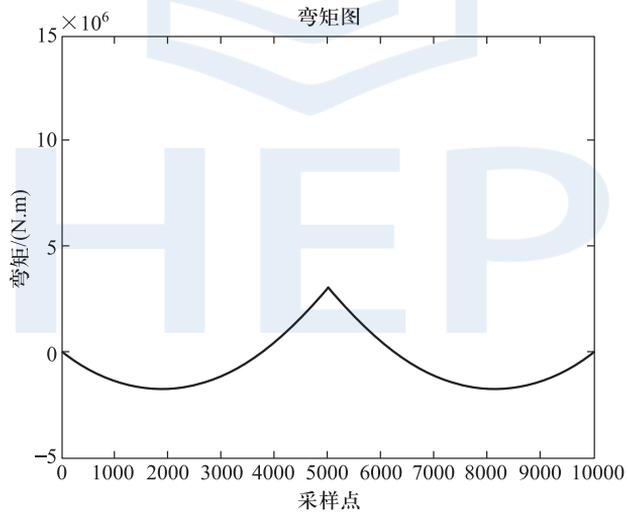
%%%%%%%%%%以下给出一个具体例子进行说明%%%%%%%%%%
L = 5000;LII = 2 * L;q = 1;Els = 200 * 10^3;It = 1130 * 10^4;wc = 0.5 * 10^-3;
                              %给出具体的参数,
%L = 5000mm, q = 1N/mm, E = 200GPa, I = 1134cm^4, wc = 0.5mm

%%%%%%%%%%第一步求挠曲线图%%%%%%%%%%
w11 = subs(w1);            %代入具体参数
w12 = subs(w2);            %代入具体参数
x = 1:1:10000;             %设定 x 的取值范围及步长
w11 = subs(w11,'x',x);     %代入求解相应的 w1 值
w12 = subs(w12,'x',x);     %代入求解相应的 w2 值
w11 = w11(1:5000);         %截取左段梁挠度
w12 = w12(5001:10000);     %截取右段梁挠度
w = [w11,w12];w = -1 * w;  %生成全段梁的挠度曲线
figure(1)
plot(x,w,'r'),axis([-10,10010,-2,0.5]),title('挠曲线图')%绘制梁的挠

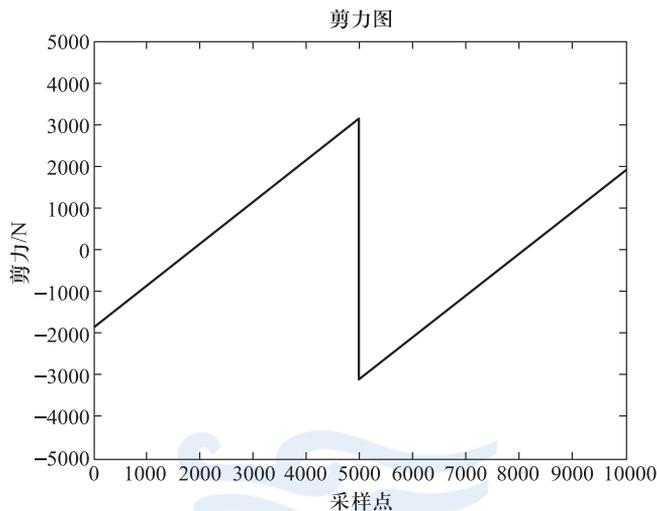
```

(a)



(b)



(c)

图 10-12

例 10-2 矩形截面柱体的扭转。

以下我们将利用 MATLAB 中的偏微分方程工具箱 (PDETOOL) 来演示其求解过程。

对于矩形截面柱体的扭转,其应力函数满足 $\nabla^2 \psi = -2G\phi$ (ψ 为应力函数,而 ϕ 表示截面转过的相对角度)。 G 为剪切模量。边界条件为 $x = \pm a, y = \pm b, \psi = 0$, 设柱体材料为钢,则 $G = 8 \times 10^4$ MPa, 设截面相对转动的角度为 0.0025 rad。

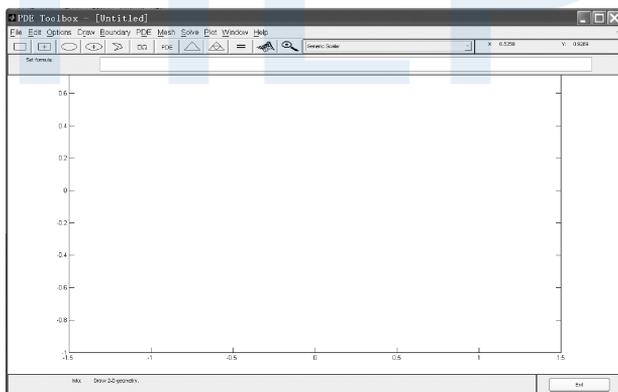


图 10-13

解:在命令窗口输入 PDETOOL,打开偏微分方程工具箱,如图 10-13 所示界面:选择菜单 option / axes limits,对话框如图 10-14 所示,输入 $[-1.2 \ 1.1]$, $[-1.2 \ 1.3]$ 。

为了帮助定位边界,可利用 option / grid 打开栅格,如图 10-15 所示:



图 10-14

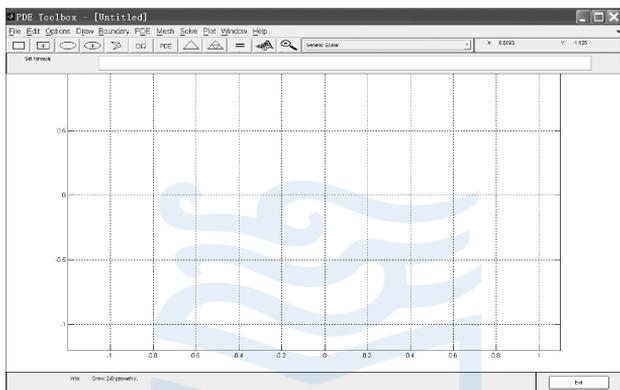


图 10-15

第一步:建立模型。

选择按钮 ,画一个矩形(图 10-16)。

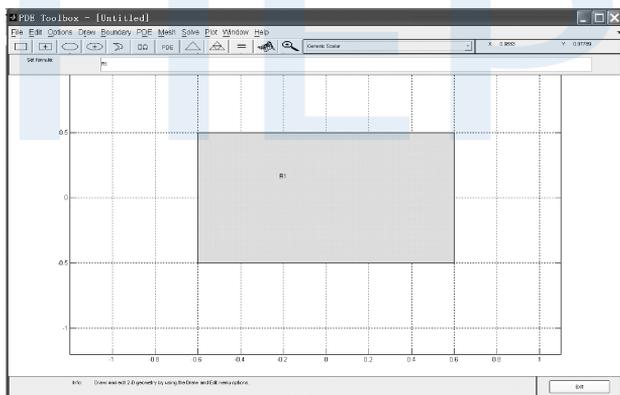


图 10-16

为了精确定位矩形,可双击矩形区域,得到图 10-17 所示对话框:

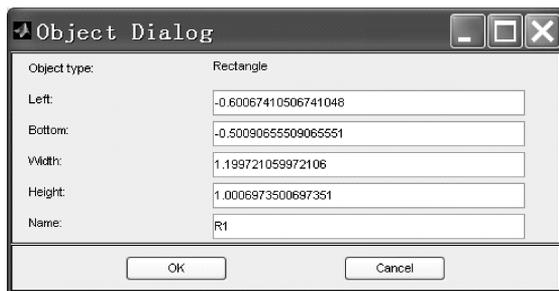


图 10-17

将 Left 设为 -0.6, Bottom 设为 -0.5, Width 设为 1.2, Height 设为 1, 单击 OK 可得到准确的矩形。

第二步: 设定边界条件。

单击 , 进入边界条件对话框(图 10-18), 选择 Dirichlet 边界条件, 也即第一类边界条件, 描述边界条件的方程是 $h * u = r$, 这里的 u 是待求函数, h 一栏中输入 1, r 一栏中输入 0, 表示势函数在边界上为 0。

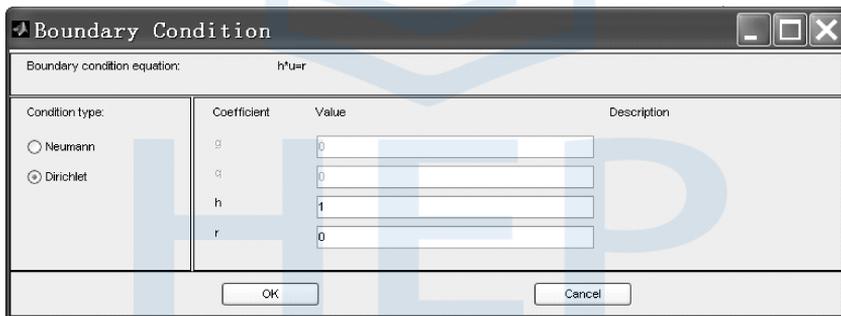


图 10-18

第三步: 设定方程类型。

单击 , 打开对话框如图 10-19 所示。输入 $c = 1, a = 0, f = 400$ 。构成需要的泊松方程。

第四步: 建立网格。

单击 , 进行网格划分(图 10-20), 还可以单击  进行网格的细分。

第五步: 输出结果。

单击  可以输出用颜色表示的势函数分布图, 为了得到更好的和其他

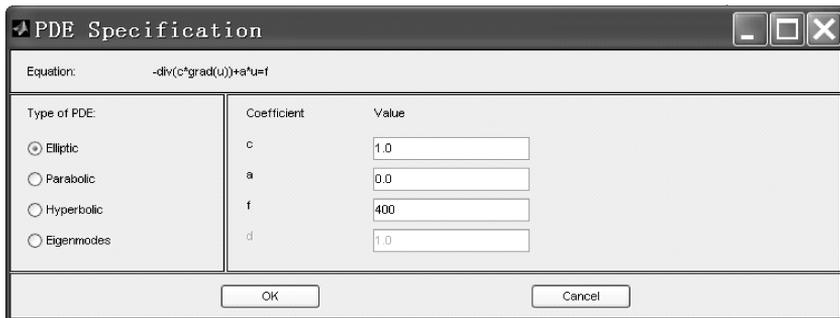


图 10-19

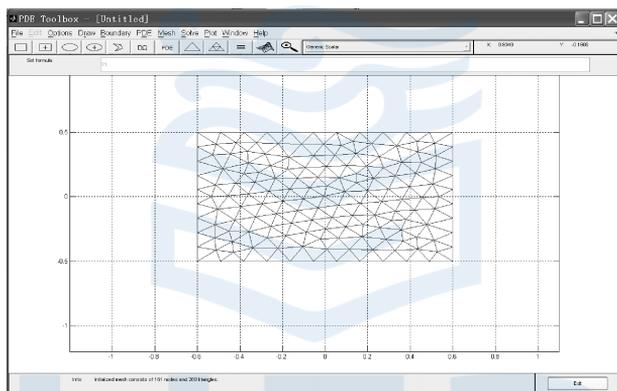


图 10-20

读者需要的结果,可单击  进行定义;输出势函数的梯度如图 10-21 所示。

图 10-22 为切应力分布图。

以下利用数值方法计算切应力与上述结果比较,结果如图 10-23 所示。

直接画的程序代码如下:

```
clear
%输入参数 a=0.6,b=0.5,sfai=0.0524,
a=0.6;b=0.4;G=8e10;sfai=0.0524;
alpha=1/3-(64*b/pi^5/a)*((tanh(pi*a/(2*b)))+(tanh(3*pi*a/(2*b)))/3^5+(tanh(5*pi*a/(2*b)))/5^5+(tanh(7*pi*a/(2*b)))/7^5)%和书上一致
T=16*G*a*b^3*alpha*sfai;%扭矩
```

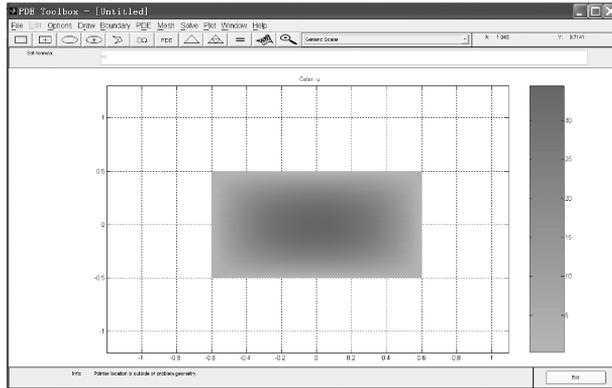


图 10-21

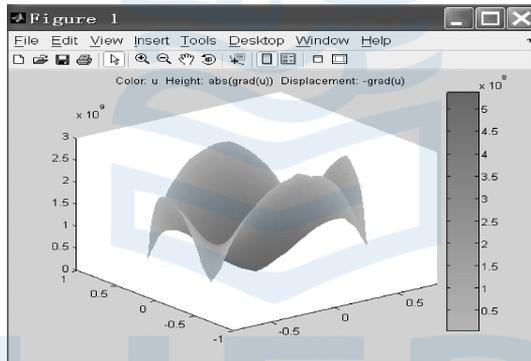


图 10-22

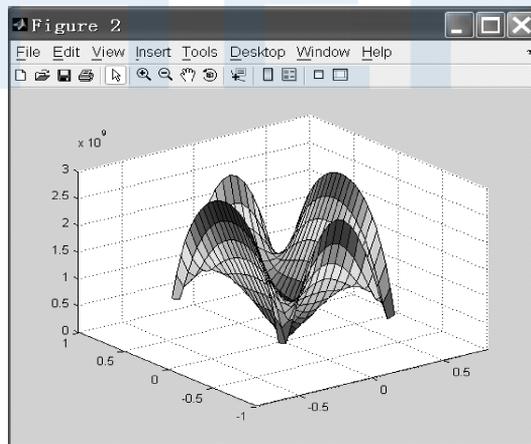


图 10-23

```

%求 szx 的表达式
for i = 1:25
    for j = 1:17
        x = -0.6+(i-1) * 0.05;
        y = -0.4+(j-1) * 0.05;
        he_szx1 = sin(pi/2) * cosh(pi * x/2/b) * sin(pi * y/2/b)/cosh(pi * a/2/b);
        he_szx2 = sin(3 * pi/2) * cosh(3 * pi * x/2/b) * sin(3 * pi * y/2/b)/cosh(3^
2 * pi * a/2/b);
        he_szx3 = sin(5 * pi/2) * cosh(5 * pi * x/2/b) * sin(5 * pi * y/2/b)/cosh(5^
2 * pi * a/2/b);
        he_szx4 = sin(7 * pi/2) * cosh(7 * pi * x/2/b) * sin(7 * pi * y/2/b)/cosh(7^
2 * pi * a/2/b);
        szx = (-1 * T/(16 * alpha * a * b^3)) * (2 * y - (16 * b/pi^2) * (he_szx1 +
he_szx2 + he_szx3 + he_szx4));
        %求 szy 的表达式
        he_szy1 = sin(pi/2) * sinh(pi * x/2/b) * cos(pi * y/2/b)/cosh(pi * a/2/
b);
        he_szy2 = sin(3 * pi/2) * sinh(3 * pi * x/2/b) * cos(3 * pi * y/2/b)/cosh(3^
2 * pi * a/2/b);
        he_szy3 = sin(5 * pi/2) * sinh(5 * pi * x/2/b) * cos(5 * pi * y/2/b)/cosh(5^
2 * pi * a/2/b);
        he_szy4 = sin(7 * pi/2) * sinh(7 * pi * x/2/b) * cos(7 * pi * y/2/b)/cosh(7^
2 * pi * a/2/b);
        szy = (-1 * T/(16 * alpha * a * b^3)) * (16 * b/pi^2) * (he_szy1 + he_szy2 +
he_szy3 + he_szy4);
        %求切应力的数值
        shear(i, j) = sqrt(szx^2 + szy^2)
    end
end

x = -0.6:0.05:0.6;
y = -0.4:0.05:0.4;
surf(x, y, shear) %结束

```

例 10-3 平面问题的算例。

以第六章例 6-1 为例,给出其 MATLAB 解。

解:%%利用应力函数求解应力状态,设简支梁受均布荷载%%

```
syms x y c1 c2 c3 c4
```

```
fai=c1 * x^2+c2 * x^2 * y+c3 * y^3+c4 * (x^2 * y^3-y^5/5);%设出应力函数
```

```
strx = diff(fai, y, 2);
```

```
stry = diff(fai, x, 2);
```

```
strxy = -1 * diff(diff(fai, x), y);%求解应力分量
```

%%%%% (边界条件)上下边界: strxy = 0, stry(上) = -q; stry(下) = 0, 左右边界:

```
int(strx * y, y, -h, h) = 0,
```

```
%%%%%int(strxy * t, y) = +或-q * l * delta, 共有 8 个边界条件
```

```
syms h long q
```

```
strxy_u = simplify(subs(strxy, y, -h));
```

```
strxy_d = simplify(subs(strxy, y, h));
```

```
stry_u = simplify(subs(stry, y, -h) + q);
```

```
stry_d = simplify(subs(stry, y, h));
```

%以上为求解上下边界,以下求解左右边界

```
jux = int(strx * y, y, -h, h);%主力矢表示为
```

```
juxy = int(strxy, y, -h, h);%主力矢表示为
```

%左右边界条件表示为

```
jux_L = simplify(subs(jux, x, -1 * long));
```

```
jux_R = simplify(subs(jux, x, long));
```

```
juxy_L = simplify(subs(juxy, x, -1 * long) - q * long);
```

```
juxy_R = simplify(subs(juxy, x, long) + q * long);
```

%从结果中可以看出,在边界条件中,上下边界条件独立方程数为 3,左右边界条件中独立方程数为 2。

%strxy_u 和 juxy_L 为同一组,可确定系数 c2, c4;以 stry_u, stry_d, juxy_R 为一组,以确定 c1, c3。以 c11, c22, c33, c44 变量存储应力函数的各系数值。

```
[ c22, c44 ] = solve( strxy_u, juxy_L, ' c2 ', ' c4 ' ); %求解 c2, c4
%syms c2; strxy_d; %声明函数与变量
stry_d2 = subs( strxy_d, { c2, c4 }, [ c22, c44 ] );
c11 = solve( stry_d2, ' c1 ' ); %求出 c1
jux2 = subs( jux_R, c4, c44 );
c33 = solve( jux2, ' c3 ' ); %求出 c3
```

```
fai2 = subs( fai, c1, c11 );
fai3 = subs( fai2, { c2, c3, c4 }, [ c22, c33, c44 ] );
```

```
%继续求解应力分量
strx_true = simplify( diff( fai3, y, 2 ) );
stry_true = diff( fai3, x, 2 );
strxy_true = -1 * diff( diff( fai3, x ), y ); %求解应力分量
```

结果:

为求应力函数的系数,在命令窗口分别输入:

```
c11, c22, c33, c44
```

输出:

```
c11 =
-1/4 * q
```

```
c22 =
3/8/h * q
```

```
c33 =
-1/40 * q * ( 2 * h^2 - 5 * long^2 ) / h^3
```

```
c44 =
-1/8/h^3 * q
```

在命令窗口输入:

```
fai3
```

输出应力函数为:

```
fai3 =
-1/4 * q * x^2 + 3/8/h * q * x^2 * y - 1/40 * q * (2 * h^2 - 5 * long^2)/h^3 * y^
3 - 1/8/h^3 * q * (x^2 * y^3 - 1/5 * y^5)
%和教材结果一致
同理,应力分量输出为 delta = 1;
strx_true =
-1/20 * q * y * (6 * h^2 - 15 * long^2 + 15 * x^2 - 10 * y^2)/h^3

stry_true =
-1/2 * q + 3/4/h * q * y - 1/4 * q/h^3 * y^3

strxy_true =
-3/4/h * q * x + 3/4 * q * x/h^3 * y^2
```

由以上例题可以看出,利用 MATLAB 软件计算弹性力学问题不仅可大大提高效率,而且使一些原本由人工计算无法完成的工作得以完成。MATLAB 软件可把数值计算、符号公式推导和计算结果可视化集成在一起,为避免人工求解弹性力学复杂问题时的繁琐,以及提高求解精度和求解效率提供了一种思路,具有鲜明的优越性。本章只是示例性的探讨了基于 MATLAB 求解弹性力学问题的范例,在弹性力学的学习和理论探讨中,合理地利用这类软件,可给人以面貌一新的感觉。

本章复习要点

1. 勒夫位移函数 $\psi(\rho, z)$ 使得不计体力时的以位移表示的布西内斯克问题的平衡方程可化为 ψ 的双调和方程。而 ψ 的选取仍由量纲分析得到其表达式的形式。
2. 在半空间表面受集中力 F 作用,和圆域内分布荷载作用时,物体内各点的应力与竖向位移(沉陷)的公式均有实际的工程背景。
3. 由布西内斯克问题可导出接触问题。其两球接触面可视为弹性半空间表面受圆形域荷载作用。
4. 两球接触的最大压应力 q_{\max} 在接触中心,最大拉应力发生在接触面的边界上,其值为 $0.133q_{\max}$ 等重要结果。
5. 热应力的概念及受热管及坝体内的热应力的简单情况的分析方法,傅里

叶定律及热弹性势等重要概念。

6. 弹性波波速与质点速度是两个不同的概念。在一维情况下,它们有下列关系

$$v = c_0 \sigma / E$$

或

$$\sigma = \rho c_0 v$$

上两式有三点重要的理解(见正文)。

7. 波由杆的固定端反射后,应力增至入射波应力的 2 倍,质点速度减为零;而波由杆的自由端反射后,应力减至零,质点速度增为 2 倍,波形均不变。

思考题

10-1 为什么接触问题可以利用布西内斯克问题的结果? 是否存在近似性? 为什么?

10-2 若欲求薄球壳基础(即将球顶壳倒置于地基上)下地基之沉陷,可用什么方法计算?(试谈思路和步骤)。

10-3 什么情况下坝体产生热应力? 和哪些因素有关?

10-4 应力波的波速与哪些因素有关? 质点运动速度和波的传播速度有什么区别? 为什么?

10-5 用 MATLAB 软件计算弹性力学问题需要做哪些准备? 有哪些必要的步骤?

HEP

下标记号法与求和约定

A-1 下标记号法

本书广泛地采用下标记号法,对于含有 3 个独立量的集,通常用一个下标符号表示,例如,对于一点的坐标记为 x_i , x_i 表示 (x_1, x_2, x_3) 这 3 个量,亦即 (x, y, z) ; 一点的位移的 3 个分量,记作 u_i , u_i 就表示 (u_1, u_2, u_3) 或 (u, v, w) ,这就是说,下标 i 取值为 1, 2, 3 (写作 $i=1, 2, 3$)。

在给出声明之后, i 自然也可取值为 1, 2, 3, \dots, n 。

类似地,对于 9 个量的集,可用两个下标,而每一个下标可取 3 个值。如 a_{ij} 就表示 $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ 这 9 个量,而含有 27 个量的集,可用 3 个下标表示,如 a_{ijk} ; 含有 81 个量的集可用 4 个下标表示,如 a_{ijkl} , 等等。

应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{zx}$ 和应变分量 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \gamma_{zx}$, 各有 9 个量 (独立地各有 6 个), 采用下标记号法, 就可记作 σ_{ij} 和 ε_{ij} 。其中 $\sigma_{11} = \sigma_x, \sigma_{22} = \sigma_y, \dots, \sigma_{31} = \sigma_{zx} = \tau_{zx}$, 类似地可以写出各分量。

在谈到应力状态、应变状态时,就以其一般分量形式 σ_{ij} 和 ε_{ij} 来表示。

A-2 求和约定

我们约定: 在同一项中, 当有一个下标出现两次时, 则对此下标从 1 到 3 (二维问题是从 1 到 2) 求和, 并限定在同一项中不能有同一下标出现 3 次或 3 次以上, 这叫做求和约定。该重复出现两次的标号称作哑标, 由于它就表示求和, 因此可以用任意其他字母替换。例如:

$$a_i b_i = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_k b_k \quad (\text{A-1})$$

$$a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = a_{kk} \quad (\text{A-2})$$

$$a_{ij} b_j = \sum_{j=1}^3 a_{ij} b_j = a_{i1} b_1 + a_{i2} b_2 + a_{i3} b_3 = a_{ik} b_k \quad (\text{A-3})$$

$$\begin{aligned} a_{ij} b_i c_j &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} b_i c_j = a_{ki} b_k c_i \\ &= a_{11} b_1 c_1 + a_{12} b_1 c_2 + a_{13} b_1 c_3 + \\ &\quad a_{21} b_2 c_1 + a_{22} b_2 c_2 + a_{23} b_2 c_3 + \\ &\quad a_{31} b_3 c_1 + a_{32} b_3 c_2 + a_{33} b_3 c_3 \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

$$(a_{ii})^2 = (a_{11} + a_{22} + a_{33})^2 = a_{ii} a_{kk} \quad (\text{A-5})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} &= \sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\varepsilon_{33} + \\ & 2(\sigma_{23}\varepsilon_{23} + \sigma_{31}\varepsilon_{31} + \sigma_{12}\varepsilon_{12}) = \sigma_{kl}\varepsilon_{kl} \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

这一求和规则也适用于含有导数的项,例如:

$$a_{i,i} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \quad (\text{A-7})$$

$$\sigma_{ij,j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} \quad (\text{A-8})$$

应当注意,求和约定是指对哑标求和。在式(A-7)中是对*i*求和。而在式(A-8)则对*j*求和,*i*在此式中没有重复,如指明*i, j = 1, 2, 3*,则式(A-8)代表*i*分别取1, 2, 3而得到的3个表达式。而下列情况则为

$$\sigma_{i,jj} = \frac{\partial^2 \sigma_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2 \sigma_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_i}{\partial x_3^2} \quad (\text{A-9})$$

对于同一项内不重复出现的下标(或肩标)叫作自由标号。用自由标号表示一般项,它可取1, 2, 3中的任一值。在同一方程式中,各项的自由标号应相同,并表示该方程式对所有自由标号的值都成立。例如:

$$x_i = c_{ij}y_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (\text{A-10})$$

表示以下3个方程式成立:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + c_{13}y_3 \\ x_2 &= c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + c_{23}y_3 \\ x_3 &= c_{31}y_1 + c_{32}y_2 + c_{33}y_3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-11})$$

在数学分析中,曾经讨论过函数的极值问题。变分法是这类问题的推广。

B-1 泛函和泛函的极值问题

首先引入泛函的概念。泛函是指一个量,它的值依赖于一个或者几个函数。变分法的基本问题是求泛函的极值。下面是一个简单的变分问题的例子。

如给定 x, y 平面上的两定点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ (图 B-1), 求满足边界条件的连接这两点的任意曲线 $y=y(x)$ 中的最短曲线。于是, 问题归结为求 P_1, P_2 两点间的曲线长度

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx \quad (\text{B-1})$$

为最小的一条曲线。这条曲线满足连续性要求和边界条件。以后我们把这种满足给定条件的函数称为容许函数。于是, 变分法问题就是

在容许函数中, 寻求给定泛函为极值的特定函数的问题。 $L=L[y]$ 是一个泛函, 因为它依赖于“变量函数” $y=y(x)$ 。求 P_1, P_2 两点间最短曲线的问题是一个变分法问题。

上述变分法问题的一般形式为: 求泛函

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx \quad (\text{B-2})$$

在满足边界条件

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2 \quad (\text{B-3})$$

下为极小值的函数 $y(x)$ 。

由数学分析知道, 如一个连续函数 $f=f(x)$, $a \leq x \leq b$, 在点 $x=x_0$ 处达到极值(最大或最小), 则 x_0 可由下列方程的解给出:

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \quad (\text{B-4})$$

或者说, 若函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处取极值, 则 $f(x)$ 的导数在该点等于零。其另一种表达方式

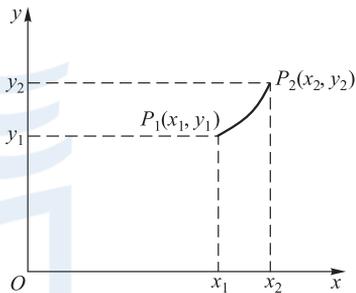


图 B-1

$$df = \left(\frac{df(x_0)}{dx} \right) dx = 0 \quad (\text{B-5})$$

由函数 $f(x)$ 二阶导数可知:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \text{ 当 } d^2f(x_0)/dx^2 > 0 \text{ 时, 函数 } f(x) \\ \text{在 } x_0 \text{ 处取极小值;} \\ 2) \text{ 当 } d^2f(x_0)/dx^2 < 0 \text{ 时, 函数 } f(x) \\ \text{在 } x_0 \text{ 处取极大值。} \end{array} \right\} \quad (\text{B-6})$$

由此可见, 对于函数 $f(x)$ 在一点的最小值来说, 式 (B-4) [或式 (B-5)] 是必要条件, 而式 (B-6) 的第一式便是充分条件。同理, 可以讨论最大值的情况。

B-2 泛函极值的必要条件, 欧拉方程

以上求函数极值的方法, 可以推广应用到泛函中来, 以下仍以最短线为例研究泛函的极值问题。

设 $y(x)$ 为使泛函 J 取最小值的容许函数, 函数 $\bar{y}(x)$ 为 $y(x)$ 邻近的任意容许函数, 即

$$\bar{y}(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x)$$

其中 ε 为小参数。而

$$\bar{y}(x) - y(x) = \varepsilon\eta(x) \quad (\text{B-7})$$

称为变量函数 $y(x)$ 的变分, 记作

$$\delta y = \varepsilon\eta(x) \quad (\text{B-8})$$

$\eta(x)$ 为满足 $\eta(x_1) = 0, \eta(x_2) = 0$ 的任意的函数 (图 B-2)。

基本引理

$$(\delta y)' = \delta y' \quad (\text{B-9})$$

证明:

$(\delta y)' = (\bar{y} - y)' = \bar{y}' - y' = \delta y'$ 即导数运算和变分运算可互换顺序。

应当注意, 变分 δy 是指 y 值的任意微小的变化; 而微分 dy 是指自变量 x 的微小变化 dx 所引起的 y 的微小变化。二者不要混淆。

设

$$\Delta J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, \bar{y}, \bar{y}') dx - \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad (\text{B-10})$$

其中, 根据 $y' = dy/dx$ 泰勒级数展开, 有

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} F(x, \bar{y}, \bar{y}') dx &= \int_{x_1}^{x_2} F\{x, [y + \varepsilon\eta(x)], [y' + \varepsilon\eta'(x)]\} dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \varepsilon\eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \varepsilon\eta' \right) dx + \end{aligned}$$

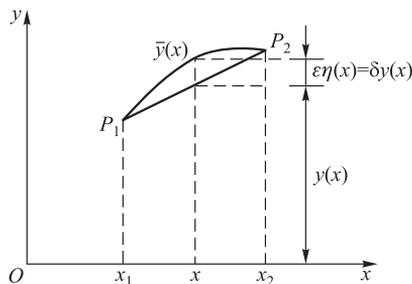


图 B-2

$$\frac{1}{2!} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} (\varepsilon \eta)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \varepsilon^2 \eta \eta' + \frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} (\varepsilon \eta')^2 \right] dx + \dots$$

于是得

$$\Delta J = \delta J + \frac{1}{2!} \delta^2 J + \frac{1}{3!} \delta^3 J + \dots \quad (\text{B-11})$$

其中泛函 J 的一阶变分, 二阶变分, …… , 定义为

$$\left. \begin{aligned} \delta J &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \varepsilon \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \varepsilon \eta' \right) dx \\ \delta^2 J &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} (\varepsilon \eta)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \varepsilon^2 \eta \eta' + \frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} (\varepsilon \eta')^2 \right] dx \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{B-12})$$

此处一阶变分 δJ , 二阶变分 $\delta^2 J$, …… , 是关于 ε 的一次, 二次, …… , 齐次式。

下面导出泛函 J 取极值时的必要条件。为此, 选择 $\eta(x)$, 使其在积分区间的两端等于零, 且在新函数 $y(x) + \varepsilon \eta(x)$ 中, ε 为小参数。对于充分接近于零的一切 ε 值, 函数 $y(x) + \varepsilon \eta(x)$ 与曲线 $y(x)$ 有 ε 接近度。因而沿 $\bar{y}(x)$ 积分, 式(B-10) 可视为 ε 的函数, 即

$$J(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} F \{ x, [y(x) + \varepsilon \eta(x)], [y'(x) + \varepsilon \eta'(x)] \} dx \quad (\text{B-13})$$

因 $J(0)$ 是 $J(\varepsilon)$ 的最小值, 故有

$$\Delta J = J(\varepsilon) - J(0) \geq 0 \quad (\text{a})$$

由于 ε 为无穷小, 故可在 $\varepsilon=0$ 处将 $J(\varepsilon)$ 展开, 于是得

$$J(\varepsilon) = J(0) + \left. \frac{dJ}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \varepsilon + o(\varepsilon^2) \quad (\text{b})$$

因为 ε 可正可负, 故为满足式 (a), 必须有

$$\left. \frac{dJ}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = J'(0) = 0$$

由此得出

$$dJ = J(\varepsilon) - J(0) = 0 \quad (\text{B-14})$$

这就证明了, $J[y]$ 取极值时要求式 (B-14) 成立, 即 J 的一次变分等于零。

由分部积分, 可得

$$\delta J = \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \varepsilon \eta \right|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \varepsilon \eta dx = 0$$

考虑到边界条件, 得 $\delta J=0$ 的必要条件为

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (\text{B-15})$$

或写成下列展开式

$$F_{,y'y'} \frac{d^2 y}{dx^2} + F_{,y'y} \frac{dy}{dx} + F_{,y'yx} - F_{,y'y} = 0 \quad (\text{B-16})$$

其中 F 的下标表示关于该变量的偏导数, 式 (B-15) 和式 (B-16) 称为欧拉方程, 一般地, 设

$$J = \int_v F(x, y, z, \varphi, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z) dv \quad (\text{B-17})$$

则欧拉方程为

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_z} \right) = 0 \quad (\text{B-18})$$

由以上讨论可知, 求泛函 $J[y]$ 的极值问题可归结为解欧拉方程 (B-15) 或 (B-16), 且满足边界条件式 (B-3)。

如需判断所得的解 $y(x)$, 使泛函 $J[y]$ 取极大还是极小, 则需考察 $\delta^2 J$ 的正负号。如 $\delta^2 J > 0$, 则解 $y(x)$ 使 J 为极小; 反之, 如 $\delta^2 J < 0$, 则解 $y(x)$ 使 J 为极大。这是因为, 当 $\delta J = 0$ 时, 有

$$\Delta J = \frac{1}{2!} \delta^2 J + \dots$$

如 $\delta^2 J > 0$, 即 $\Delta J > 0$, 这说明函数 J 的极值为极小。

例 B-1 试求下列泛函

$$J[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(y')^2 - y^2] dx$$

及边界条件 $y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

在什么曲线上取极值。

解: 欧拉方程为

$$2y + \frac{d}{dx}(2y') = 0$$

即

$$y'' + y = 0$$

其通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

利用边界条件, 得

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 1$$

故仅在曲线

$$y = \sin x$$

上达极值。

B-3 有附加条件的变分问题

有许多变分问题是求泛函

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad (\text{B-19})$$

在边界条件

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2 \quad (\text{B-20})$$

及附加条件

$$\int_{x_1}^{x_2} G(x, y, y') dx = L \quad (\text{B-21})$$

下的极值问题, L 为一常数。这类问题称为有附加条件的变分问题。典型的有附加条件的变分问题的简单例子是所谓等周问题, 即求周长为 L 的封闭曲线所围成的面积为最大的问题。

求解这类问题, 须用拉格朗日乘子法。即求下列泛函

$$H[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx + \lambda \left[\int_{x_1}^{x_2} G(x, y, y') dx - L \right] \quad (\text{B-22})$$

在边界条件式(B-20)下的极值的解。在式(B-22)中参与变分的独立变量为 y 和 λ 。于是有 $H[y]$ 的一阶变分为

$$\begin{aligned} \delta H &= \int_{x_1}^{x_2} \delta F dx + \lambda \int_{x_1}^{x_2} \delta G dx + \delta \lambda \left(\int_{x_1}^{x_2} G dx - L \right) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} (\delta F + \lambda \delta G) dx + \delta \lambda \left(\int_{x_1}^{x_2} G dx - L \right) \end{aligned}$$

令

$$F^* = F + \lambda G$$

得

$$\delta H = \frac{\partial F^*}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F^*}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F^*}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx + \delta \lambda \left(\int_{x_1}^{x_2} G dx - L \right)$$

由 $\delta H = 0$, 得

$$\frac{\partial F^*}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F^*}{\partial y'} \right) = 0 \quad (\text{B-23})$$

及

$$\int_{x_1}^{x_2} G dx - L = 0 \quad (\text{B-24})$$

由此可见, 有附加条件的变分问题, 归结为在边界条件式 (B-20) 及附加条件式 (B-21) 下, 求解方程 (B-23)。

如前所述, 求泛函 $J[y]$ 的极值问题可归结为在给定边界条件下求解欧拉方程的问题。换言之, 求解欧拉方程, 与求解泛函的极值问题 $\delta J = 0$ 等价。

以下举例说明, 欧拉方程可作为变分问题的极值条件得到。

例 B-2 若函数 $y(x)$ 的二次泛函为

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} [p(x)y^2 + 2q(x)yy' + r(x)(y')^2 + 2f(x)y + 2g(x)y'] dx \quad (\text{a})$$

今证明欧拉方程为

$$(ry')' + (q' - p)y + g' - f = 0 \quad (\text{b})$$

解: 实际上,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta J &= \int_{x_1}^{x_2} [py\delta y + qy\delta y' + qy'\delta y + ry'\delta y' + f\delta y + g\delta y'] dx \\ &= (ry' + qy + g) \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} [(ry')' + (q' - p)y + g' - f] \delta y dx \end{aligned} \quad (\text{c})$$

于是, 由 $\delta J = 0$, 计及零边界条件, 并注意 δy 在积分范围内的任意性, 则可得式 (b)。

例 B-3 如函数 $y(x)$ 的二次泛函

$$J[y] = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} [p(x)y^2 + 2q(x)yy' + r(x)(y')^2] dx \quad (\text{d})$$

在边界条件

$$y(x_1) = y(x_2) = 0 \quad (\text{e})$$

和附加条件

$$\frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} k(x) y^2 dx = 1 \quad (\text{f})$$

下取极值的变分问题成立,则相应的欧拉方程为

$$(ry') + (q' - p - \lambda k)y = 0 \quad (\text{g})$$

其中 λ 为标量参数。

解:实际上,引入拉格朗日乘子 λ 后,有

$$H = J[y] + \lambda \left[\frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} k(x) y^2 dx - 1 \right] \quad (\text{h})$$

计算 δH , 有

$$\begin{aligned} \delta H &= \int_{x_1}^{x_2} (py\delta y + qy\delta y' + qy'\delta y + ry'\delta y') dx - \\ &\quad \lambda \int_{x_1}^{x_2} ky\delta y dx - \delta \lambda \left[\frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} k(x) y^2 dx - 1 \right] \\ &= (ry' + qy) \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} [(ry')' + (q' - p - \lambda k)y] \delta y dx - \\ &\quad \delta \lambda \left[\frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} k(x) y^2 dx - 1 \right] \end{aligned}$$

令 $\delta H = 0$, 可得式(f)和式(g)。

B-4 变边界问题,自然边界条件

在以上所讨论的泛函极值问题中,边界上的值是固定不变的。在这样的条件下,导出了欧拉方程。现在考虑边界值变动时,即在积分限变动条件下泛函取极值的条件。

当边界和(或)变量函数在边界上的值容许改变时,欧拉方程仍成立,原因是,虽然边界和函数的边界值都可以变化,但在可供选择的变量函数中,含有边界和函数的边界值都不变的一类在内。这就是说,容许函数族中除了与所研究的变量函数有公共边界的比较函数外,还可以取具有变边界的函数。例如,在泛函

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad (\text{B-25})$$

中, x_1, x_2 以及 $y(x_1), y(x_2)$ 之值都是可变的,就是说,曲线 $y = y(x)$ 的端点位置可变。如在所有可变的曲线中, $y = y(x)$ 是使泛函 $J[y]$ 取极值的一条曲线,则与

端点固定的一类曲线相比, $y=y(x)$ 必然也是使 $J[y]$ 取极值的一条曲线。换句话说, 不论在哪一条曲线 $y=y(x)$ 上, 若能使其具有变边界问题达到极值, 则对于与其有公共边界点的更窄的曲线类来说, 将更能使其达到极值, 从而不变边界问题取极值的基本必要条件必须满足。因而, 仍满足欧拉方程

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

下面讨论, 当式(B-25)中的积分限 x_1, x_2 不变, 而 $y(x_1), y(x_2)$ 之值可变时, 使泛函 $J[y]$ 取极值的函数 $y(x)$, 除了必须满足欧拉方程外, 还要满足什么条件。

此时, 泛函 J 取极值的条件为

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx = 0 \quad (\text{B-26})$$

注意到基本引理式(B-9)

$$\delta y' = \frac{d(\delta y)}{dx}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx = \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx$$

有

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2}$$

因为 δy 在区间 $[x_1, x_2]$ 上是任意的, 故欧拉方程必须仍满足。此外, 要求在 $x = x_1, x = x_2$ 处, 有

$$\delta y = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (\text{B-27})$$

如 y 事先并未规定它在边界上的值(此时 δy 将不等于零), 则泛函 J 取极值的必要条件为

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (\text{B-28})$$

式(B-27)中第一类边界条件称为强加边界条件或几何边界条件。第二类边界条件, 即式(B-28), 是 $y(x)$ 在端点 $x = x_1, x = x_2$ 所应满足的条件, 称为自然边界条件。

对于 x_1, x_2 可变的情况, 也有类似的边界条件。

例 B-4 设曲线两端在 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 直线上, 求 x_1, x_2 间最短线的必要条件, 并说明其几何意义。

解: x_1, x_2 间的任意曲线长度为

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (\text{a})$$

其欧拉方程为

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right] = 0 \quad (\text{b})$$

积分后, 得

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C$$

其通解为

$$y = C_1 x + C_2 \quad (\text{c})$$

由式(c)知 $y(x)$ 显然是一直线, 它尚应满足自然边界条件:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = 0 \quad (\text{在 } x_1, x_2 \text{ 处}) \quad (\text{d})$$

即

$$y' = 0 \quad (\text{在 } x_1, x_2 \text{ 处})$$

式(c)代入式(d), 得 $C_1 = 0$, 所以 $y = C_2$ 。

它是平行于 x 轴的直线段。

HEP

附录 C

MATLAB 简介

MATLAB 是由美国 MathWorks 公司推出的用于数值计算和图形处理的科学计算软件。MATLAB 是英文 Matrix Laboratory (矩阵实验室) 的缩写。该软件具备卓越的数值计算能力,还提供了专业水平的符号计算、文字处理、可视化建模仿真等功能。MATLAB 的基本数据单位是矩阵,它的指令表达式与数学、工程中常用的形式十分相似,故用 MATLAB 来计算问题要比用其他语言简捷得多。MATLAB 还具有很强的功能扩展能力,其内部的程序包都提供了输入输出接口,用户通过对源程序的修改或加入自己编写的程序可以构造新的专用工具包,非常方便实用。

在国际学术界、设计研究单位和工业部门, MATLAB 已经被确认为准确、可靠的科学计算标准软件,被认为是进行高效研究与开发的首选软件工具。

C-1 MATLAB 的语言特点

MATLAB 和其他高级语言一样,使人们摆脱了需要直接对计算机硬件资源进行操作,是第四代计算机语言,利用其丰富的函数资源,使编程人员从繁琐的程序代码中解放出来。MATLAB 最突出的特点就是简洁、直观,符合人们思维习惯。以下简单介绍 MATLAB 的主要特点:

(1) 语言简洁紧凑,使用方便灵活,库函数极其丰富。MATLAB 程序书写形式自由,压缩了一切不必要的编程工作。用户不必担心函数的可靠性。

(2) 运算符丰富。由于 MATLAB 是用 C 语言编写的,有和 C 语言几乎一样多的运算符,所以 MATLAB 的运算符将使程序变得极为简短。

(3) MATLAB 既具有结构化的控制语句(如 for 循环、while 循环、break 语句和 if 语句等),又有面向对象编程的特点。

(4) 程序限制不严格,程序设计自由度大。用户无需对矩阵预定义就可使用。

(5) 程序的可移植性好,基本上不做修改就可以在各种型号的计算机和操作系统上运行。

(6) MATLAB 的图形功能强大。和其他语言相比,在 MATLAB 里,数据的可视化非常简单,具有较强的编辑图形界面的能力。

(7) MATLAB 的另一特色是具有功能强大的工具箱。工具箱包含两个部分:核心部分和各种可选的工具箱。核心部分中有数百个核心内部函数,又分为

功能性的和学科性的两类。功能性工具箱主要用来扩充其符号计算功能、图示建模仿真功能、文字处理功能以及与硬件实时交互,功能性工具箱可用于多种学科。学科性工具箱是专业性比较强的、高水平的、非常可靠的,用户无须编写自己学科范围内的基础程序,就可以直接用以进行科学研究。

(8) 源程序的开放性。开放性也许是 MATLAB 最受人们欢迎的特点。除内部函数以外,所有的核心文件和工具箱文件都是可读可改的源文件,用户可以通过对源文件的修改以及加入自己的文件,构成新的自己的工具箱备用。

MATLAB 具有强大的功能,能使用户从繁重的计算工作中解脱出来,把精力集中于研究、设计以及基本理论的理解上,是必备的科学计算软件。

下面通过对 MATLAB 进行简单的介绍,希望能使读者对 MATLAB 有初步的认识,掌握使用 MATLAB 进行编程解题的基本方法。

C-2 算术符号

我们可以使用 MATLAB 提供的基本数学运算符号,如:+(加)、-(减)、*(乘)、/(除)、^(乘方),来进行简单的数学运算,只须将运算式直接在 MATLAB 提示符(>>)后输入,并按 Enter 键即可。例如:

```
>>(5 * 2^3+1.3-0.8) * 10/25  
ans =  
16.2000
```

MATLAB 会将默认的运算结果命名为 ans(单词 answer 的简写)。

C-3 注释、标点符号

可以利用分号(;)或逗号(,)在一行中输入多条命令,以分号(;)结尾的表达式式的运算结果不显示,而以逗号(,)结尾的表达式则要显示结果。例如:

```
>> a=6,b=8;c=10  
a =  
6  
c =  
10
```

有时也可以将一个长表达式分在几行上写,用三个连续的句点——续行符(...)来表示同一语句的延续输入。此外,MATLAB 会忽略所有在百分号(%)之后的文本,因此百分号之后的所有文本都将被视为程序的注释。

C-4 赋值语句

通过等号可以把表达式赋值给变量。

例如:设球半径为 $r=3$,求球的体积。

```
>> r=3 %将表达式 3 赋予变量 r
```

```
r =
```

```
3
```

```
>> v=4/3 * pi * r^3 % pi 为内置常量,乘方用^表示
```

```
v =
```

```
113.0973
```

C-5 数学函数

MATLAB 提供了很多内置的函数来支持基本的数学运算。其中大多数函数的用法和通常书写函数时的用法一样,例如:

```
>> x=sqrt(8)
```

```
x =
```

```
2.8284
```

```
>> y=acsc(x)
```

```
y =
```

```
0.3614
```

关于其他一些数学函数不再一一举例,如:fix(向 0 取整),mod(求模或有符号取余),rem(求除法的余数),abs(求实数的绝对值或复数的模),asin(反正弦函数),acos(反余弦函数),log10(求以 10 为底的对数)等,请见相关参考文献。

C-6 函数定义

MATLAB 可以通过构建 M 函数文件(以 .m 为后缀的文件)来定义自己的函数。通过 M 函数文件,用户就可以把实现一个抽象功能的 MATLAB 代码封装成一个函数接口,在以后的应用中像使用内置函数一样重复调用。例如:把函数 $f(x)=1-x^2/4$ 写入 M 文件 fun.m 中,在编辑器中输入如下内容:

```
function y=fun(x)
```

```
y=1-x^2/4;
```

把函数存入 M 文件 fun.m 中后,就可以作为一个函数在 MATLAB 命令窗口中调用。

```
>>tan(fun(4))
```

```
ans =
```

0.1425

C-7 图形

MATLAB 可以生成曲线和曲面的二维和三维图形。有关 MATLAB 图形操作的函数有很多,如:

`plot(x,y)` 作出以数据 $[x(i),y(i)]$ 为节点的折线图,其中 x,y 为同长度的向量;

`fplot('fun',[a,b])` 作出函数 `fun` 在区间 $[a,b]$ 上的函数图,`fun` 可以是 M 函数名,也可是字符串;

`ezplot(fun,lims)` 绘制字符串 `fun` (可以是显函数、隐函数或参数方程)指定的函数;

`plot3(x,y,z)` 空间曲线图,其中 x,y,z 为同长度向量。

其中 `plot` 函数是绘制二维图形最常用的函数。例如(图 C-1):

`>> plot([1;5 2 6],[1;4 -1 2])` %依次将(1,1),(5,4),(2,-1),(6,2)连接起来得一条折线

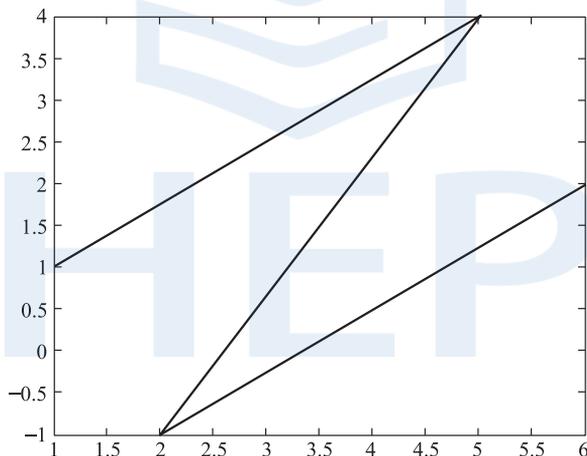


图 C-1

图形显示在图形窗口,在图形窗口可以使用 File 菜单保存(Save)为 fig 文件,或者导出(Export)为图形文件,也可利用图形窗口 Edit 菜单 Copy Figure 将图片复制到剪贴板,从而进一步粘贴到 Word 或其他应用程序中。

图形的线型、标记、颜色均可根据要求设定。例如:b 蓝(默认),实线(默认),g 绿,虚线等。

C-8 矩阵

MATLAB 中的所有变量都被看成是矩阵或数组。可以直接输入矩阵,例如:

```
>>A=[1 2 3;4 5 6;7 8 9]
```

```
A =
```

```
    1    2    3
    4    5    6
    7    8    9
```

分号用来分隔矩阵的行。注意:矩阵中的元素需要用空格隔开。

在力学、物理和工程技术中的很多问题在数学上都可以归结为求解矩阵特征值问题。MATLAB 提供了一个求矩阵特征值和特征向量的函数 eig,例如:

```
>> [V,L]=eig(A) %求矩阵 A 的特征值及对应的特征向量
```

```
V =
```

```
-0.2320   -0.7858    0.4082
-0.5253   -0.0868   -0.8165
-0.8187    0.6123    0.4082
```

```
L =
```

```
16.1168         0         0
         0   -1.1168         0
         0         0   -0.0000
```

由计算结果可知,矩阵 A 的三个特征值为 16.116 8,-1.116 8,-0.000 0。

C-9 结束语

进一步深入的学习可以参见 MATLAB 的在线帮助和有关专门著作。

附录 C 参考文献

- [1] 亨塞尔曼.精通 MATLAB 7[M].朱仁峰,译.北京:清华大学出版社,2006.
- [2] 王正林.精通 MATLAB 科学计算[M].北京:电子工业出版社,2008.
- [3] 马修斯.数值方法(MATLAB 版)[M].周璐,译.北京:电子工业出版社,2008.
- [4] 徐金明.MATLAB 教程[M].北京:北京交通大学出版社,2005.
- [5] 张磊.MATLAB 实用教程[M].北京:人民邮电出版社,2008.

参 考 文 献

- [1] 铁摩辛柯,古地尔.弹性理论[M].徐芝纶,译.北京:高等教育出版社,1990.
- [2] 徐芝纶.弹性力学:上册[M].北京:人民教育出版社,1979.
- [3] 徐芝纶.弹性力学:下册[M].北京:人民教育出版社,1980.
- [4] 施振东,韩耀新.弹性力学教程[M].北京:北京航空学院出版社,1987.
- [5] 钱伟长,叶开源.弹性力学[M].北京:科学出版社,1956.
- [6] 费洛宁柯-鲍罗第契 M M.弹性力学[M].朱广才,马士修,译.北京:商务印书馆,1953.
- [7] 王光远.弹性及塑性理论[M].北京:中国建筑工业出版社,1959.
- [8] 蒋咏秋,等.弹性力学基础[M].西安:陕西科技出版社,1984.
- [9] 杜庆华,余寿文,姚振汉.弹性理论[M].北京:科学出版社,1986.
- [10] 王启德.应用弹性理论[M].林砚田,译.北京:机械工业出版社,1966.
- [11] 黄炎.工程弹性力学[M].北京:清华大学出版社,1982.
- [12] 薛大为.板壳理论[M].北京:北京理工大学出版社,1988.
- [13] 谢贻权,林钟祥,丁皓江.弹性力学[M].杭州:浙江大学出版社,1988.
- [14] 陆明万,罗学富.弹性理论基础[M].北京:清华大学出版社,1990.
- [15] 杨绪灿,金建三.弹性力学[M].北京:高等教育出版社,1987.
- [16] 杨桂通.弹塑性力学[M].北京:人民教育出版社,1980.
- [17] 吴家龙.弹性力学[M].上海:同济大学出版社,1993.
- [18] 徐秉业,黄炎,刘信声,等.弹塑性力学及其应用[M].北京:机械工业出版社,1984.
- [19] 严宗达,王洪礼.热应力[M].北京:高等教育出版社,1993.
- [20] 程昌钧.弹性力学[M].兰州:兰州大学出版社,1995.
- [21] 徐秉业.弹性与塑性力学:例题和习题[M].2版.北京:机械工业出版社,1991.
- [22] 徐秉业,刘信声.应用弹塑性力学[M].北京:清华大学出版社,1995.
- [23] 吴毓熙.应用弹性力学[M].上海:同济大学出版社,1989.
- [24] 卓家寿.弹性力学中的有限元法[M].北京:高等教育出版社,1988.
- [25] 杨桂通,张善元.弹性动力学[M].北京:中国铁道出版社,1988.
- [26] 杨桂通.塑性动力学[M].北京:高等教育出版社,2000.
- [27] 杰米多夫 C M.弹性力学[M].杨桂通,蔡中民,译.北京:高等教育出版

- 社,1992.
- [28] 武际可,王敏中.弹性力学引论[M].北京:北京大学出版社,1981.
- [29] 樊大钧.数学弹性力学[M].北京:新时代出版社,1983.
- [30] 钟伟芳,皮道华.高等弹性力学[M].武汉:华中理工大学出版社,1993.
- [31] 张行.高等弹性理论[M].北京:北京航空航天大学出版社,1994.
- [32] 俞嘉声.弹性力学教程[M].北京:高等教育出版社,1991.
- [33] 钱伟长.变分法及有限元[M].北京:科学出版社,1980.
- [34] 胡海昌.弹性力学的变分原理及其应用[M].北京:科学出版社,1981.
- [35] RABOTNOV U N. Mechanics of deformable solid bodies (Russian Edition) [M].Moscow: Science Press, 1979.
- [36] SAADA A S. Elasticity, theory and applications [M]. New York: Pergamon Press, 1974.
- [37] SAMULE V E. Fundamental theory of elasticity and plasticity (Russian Edition) [M].Moscow: Higher Education Press, 1982.
- [38] NIKIFOROFF L V. A Course of theory of elasticity and plasticity (Russian Edition) [M].Moscow: Higher Education Press, 1959.
- [39] LOVE A E H. A Treatise on the mathematical theory of elasticity [M]. 4th ed. New York: Dover Publications, 1944.
- [40] ERINGEN A C. Mechanics of continua [M]. 2nd ed. New York: Robert E. Publishing Company, 1980.
中译本:爱林根.连续统力学 [M].程昌钧,俞焕然,译.北京:科学出版社,1991.
- [41] MUSKHELISHVILI N I. Some basic problems of mathematical theory of elasticity (Russian Edition) [M]. 5th ed. Moscow: Science Press, 1966.
第4版中译本:穆斯赫利什维利.数学弹性力学的几个基本问题 [M].赵惠元,译.北京:科学出版社,1958.
- [42] SOKOLINKOFF I S. Mathematical theory of Elasticity [M]. 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1956.
- [43] 阿部博之,关根英树.弹性学 [M].东京:コナ社,1983.
- [44] 杨桂通.弹性力学简明教程 [M].北京:清华大学出版社,2006.
- [45] 武际可.力学史 [M].上海:上海辞书出版社,2010.
- [46] 杨桂通.弹塑性动力学基础 [M].北京:科学出版社,2008.
- [47] 武际可.近代力学在中国的传播与发展 [M].北京:高等教育出版社,2005.

- [48] 徐秉业,等.固体力学[M].北京:中国环境科学出版社,2005.
- [49] 徐秉业.简明弹塑性力学[M].北京:高等教育出版社,2011.
- [50] 杨桂通.Theory of Elasticity and Plasticity[M].北京:中国建材工业出版社,2005.



外国人名译名对照表

Airy, G.B.	艾里
Beltrami, E.	贝尔特拉米
Boussinesq, J.V.	布西内斯克
Castigliano, A.	卡斯蒂利亚诺
Cauchy, A.-L.	柯西
d' Alembert, J.le R.	达朗贝尔
Dirichlet, P.G.L.	狄里克雷
Euler, L.	欧拉
Fourier, J.B.J.	傅里叶
Galerkin, B.G.	伽辽金
Hamilton, W.R.	哈密顿
Hertz, H.R.	赫兹
Hooke, R.	胡克
Kirchhoff, G.R.	基尔霍夫
Lagrange, J.-L.	拉格朗日
Lamé, G.	拉梅
Laplace, P.-S.	拉普拉斯
Lévy, M.	莱维
Love, A.E.H.	勒夫
Michell, J.H.	米歇尔
Navier, C.-L.-M.-H.	纳维
Poisson, S.-D.	泊松
Prandtl, L.	普朗特
Rayleigh Lord	瑞利
Ritz, W.	里茨
Saint-Venant, A.J.C.B.de	圣维南
Taylor, G.I.	泰勒
Timoshenko, S.P.	铁摩辛柯
Young, T.	杨

索 引

(按汉语拼音字母顺序)

A

艾里应力函数 Airy stress function 72

B

坝 dam 100
八面体平面 octahedral plane 22
半逆解法 semi-inverse method 63
贝尔特拉米-米歇尔方程 Beltrami-Michell equation 62
变形 deformation 31
边值问题 boundary-value problem 58
表面波 surface wave 207
波速 wave velocity 204
薄膜比拟 membrane analogy 156
布西内斯克问题 Boussinesq problem 191

C

沉陷 settlement 99

D

单元刚度矩阵 element stiffness matrix 142
等色线 isochromatic 96
等温过程 isothermal process 112
狄里克雷问题 Dirichlet problem 152
叠加原理 superposition principle 65
对数螺线 logarithmic spiral line 96

F

反对称张量 anti-symmetric tensor 33
反射波 reflected wave 207
傅里叶定律 Fourier law 199

傅里叶级数	Fourier series	84
G		
刚体位移	rigid body displacement	31
各向同性	isotropy	2
广义胡克定律	generalized Hooke law	45
H		
赫兹接触问题	Hertz contact problem	196
横波	transverse wave	204
厚壁筒	thick-walled cylinder	91
混合边值问题	mixed boundary condition	59
J		
畸变能	energy of distortion	54
基尔霍夫-勒夫假定	Kirchhoff-Love hypothesis	162
几何边界条件	geometrical boundary condition	234
伽辽金法	Galerkin method	133
解的唯一性定理	uniqueness of solution	64
绝热过程	adiabatic process	112
均匀性	homogeneity	2
K		
卡氏第一定理	Castigliano first theorem	122
卡氏第二定理	Castigliano second theorem	128, 129
开口薄壁杆	rod of thin-walled open cross section	158
抗扭刚度	torsional rigidity	151
抗弯刚度	flexural rigidity	167
克罗内克 δ 符号	Kronecker delta symbol	20
L		
拉格朗日乘子	Lagrange multiplier	231
拉梅常量	Lamé constants	47
拉梅-纳维方程	Lamé-Navier equation	60
拉普拉斯算子	Laplacian	60
莱维解	Lévy solution	177
勒夫位移函数	Love displacement function	193

里茨法	Ritz method	131
连续性	continuity	2
裂纹尖端	crack tip	109

M

面力	surface force	4
----	---------------	---

N

逆解法	inverse method	63
-----	----------------	----

O

欧拉方程	Euler equation	230
------	----------------	-----

P

膨胀波	dilatation wave	207
泊松比	Poisson ratio	48
泊松方程	Poisson equation	150
普朗特应力函数	Prandtl stress function	149

Q

墙梁	deep beam	84
翘曲函数	warping function	147
切变模量	shear modulus	48
切应变	shear strain	36
切应力	shear stress	6
切应力互等定理	reciprocal theorem of shear stress	12
求和约定	summation rule	13

R

热力学第一定律	first law of thermodynamics	112
热弹性势	thermal elastic potential	202
热应力	thermal stress	199
瑞利波	Rayleigh wave	207

S

圣维南原理	Saint-Venant principle	64
声阻抗率	specific acoustic impedance	206

双调和方程	biharmonic equation	72
T		
弹性波	elastic wave	204
弹性模量	elastic modulus	44, 48
弹性势	elastic potential	53
弹性应变能	elastic strain energy	53
体积改变能	energy of volume change	54
体积模量	bulk modulus	51
体力	body force	4
体应变	bulk strain	51
W		
位移法	displacement method	59
温度场	thermal field	199
无旋波	irrotational wave	207
X		
线胀系数	linear expansion coefficient	199
相对位移张量	relative displacement tensor	33
小变形	small deformation	2
虚位移原理	principle of virtual displacement	114
虚应力原理	principle of virtual stress	126
Y		
压力泡	pressure bulb	96
杨氏模量	Young modulus	44, 48
应变不变量	strain invariant	38
应变能密度	strain energy density	53
应变协调方程	equation of strain compatibility	40
应变位移关系式	strain-displacement relation	37
应变余能	complementary strain energy	113, 127
应变张量	strain tensor	34
应力	stress	5
应力不变量	stress invariant	21
应力函数	stress function	72
应力集中	stress concentration	104

应力能	stress energy	113, 127
应力偏张量	deviatoric tensor of stress	23
应力球张量	spherical tensor of stress	23
应力椭球面	stress ellipsoid surface	23
应力协调方程	equation of stress compatibility	62
应力张量	stress tensor	8
有限元法	finite element method	139

Z

正应变	normal strain	35
正应力	normal stress	6
主方向	principal direction	19
主平面	principal plane	19
主应变	principal strain	37
主应力	principal stress	19
主应力空间	principal stress space	21
柱面弯曲	cylindrical bending	175
转动张量	rotation tensor	34
自然边界条件	natural boundary condition	234
总刚度阵	global stiffness matrix	143
纵波	longitudinal wave	204
最大切应力轨迹	trajectory of maximum shear stress	96
最小功定理	principle of least work	128
最小应变能定理	theorem of minimum strain energy	128
最小总势能原理	theorem of total minimum potential energy	120
最小总余能原理	theorem of total minimum complementary energy	128



作者简介

杨桂通 (1931—2016), 河北新河人。太原理工大学教授, 博士生导师。曾任太原理工大学校长。1963 年获苏联科学院技术科学副博士学位(Ph.D.)。研究方向为弹塑性动力学。主要著作有《塑性动力学》《弹塑性动力学基础》《弹塑性力学(中文版和英文版)》及《土动力学》等。曾任中国力学学会常务理事、生物力学专业委员会主任、国家教委工科力学课程教学指导委员会委员、《应用数学和力学》常务编委《固体力学学报》主编等。

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010) 58581999 58582371 58582488

反盗版举报传真 (010) 82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社法律事务与版权管理部

邮政编码 100120

防伪查询说明

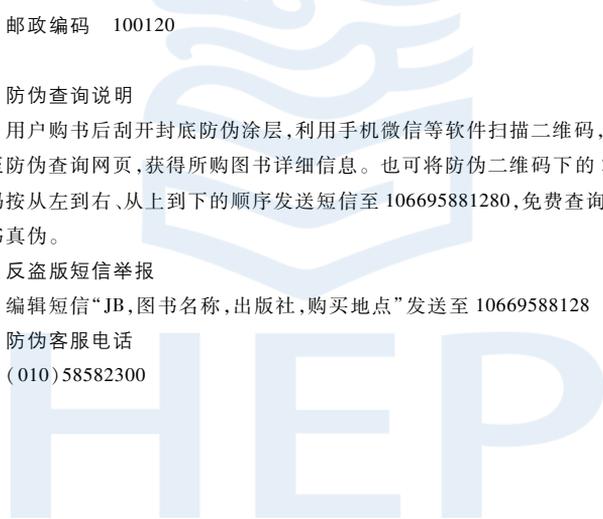
用户购书后刮开封底防伪涂层，利用手机微信等软件扫描二维码，会跳转至防伪查询网页，获得所购图书详细信息。也可将防伪二维码下的20位密码按从左到右、从上到下的顺序发送短信至106695881280，免费查询所购图书真伪。

反盗版短信举报

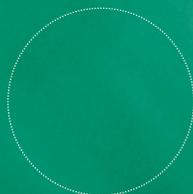
编辑短信“JB,图书名称,出版社,购买地点”发送至10669588128

防伪客服电话

(010) 58582300



Elasticity



数字课程网站

网址: <http://abook.hep.com.cn/1254881>
<http://abook.hep.edu.cn/1254881>

数字课程账号 使用说明详见书内数字课程说明页

ISBN 978-7-04-049747-2



9 787040 497472 >

定价 33.40 元